MT23 - A2023 - Examen - Correction médian

Exercice 1

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Est-ce que le système $Ax = b$ peut admettre une unique solution ? Justifier soigneusement la réponse.
2. Résoudre en fonction de α le système $Ax = 0$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ en fonction de α.
4. Toujours en fonction de α, déduire $\mathrm{rang}(A)$.

1. $Ax = b$ ne peut pas admettre une unique solution.
   En effet, $\mathrm{rang}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \text{nb colonnes}(A) = 4$, or $\mathrm{rang}\, A \leq 3$ donc $\dim \mathrm{Ker}\, A \geq 1$. Il existe donc $x_0 \neq 0 \in \mathrm{Ker}\, A$. D'où, si $Ax = b$, $A(x + x_0) = b$.
2.

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & \alpha x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & (\alpha+1)x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & (\alpha-3)x_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

— Si $\alpha \neq 3$, $\quad Ax = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & -5x_4 \\ x_2 & = & x_4 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right.$

— Si $\alpha = 3$, $\quad Ax = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & 5x_3 - 5x_4 \\ x_2 & = & -2x_3 + x_4 \end{array} \right.$

3. — Si $\alpha \neq 3$, $x = \begin{pmatrix} -5x_4 \\ x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Le vecteur $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$ donc $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{vect} \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

   De plus, ce vecteur est non nul donc c'est une base de $\mathrm{Ker}\, A$

— Si $\alpha = 3$, $x = \begin{pmatrix} 5x_3 - 5x_4 \\ -2x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$ donc $\text{Ker } A = \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Ils ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre et donc une base de Ker A

4. — Si $\alpha \neq 3$, rang A + dim Ker $A = 4$ et dim Ker $A = 1$ donc rang $A = 3$.
   — Si $\alpha = 3$, dim Ker $A = 2$ donc rang $A = 2$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ sa base canonique. Pour tout $p \in \mathcal{P}_2$ de la forme $p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2$, on considère l'application $u : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$u(p) = (a_0 - a_1, a_2)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Donner l'expression de la matrice A représentant u dans les bases canoniques de $\mathcal{P}_2$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer une base de Ker u.
4. Déterminer Im u.
5. Que peut-on en déduire sur u ?
6. Soient $q_0 = p_0$, $q_1 = p_0 + p_1$ et $q_2 = p_0 + p_1 + p_2$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (q_0, q_1, q_2)$ est une base de $\mathcal{P}_2$.
   (b) En déduire un supplémentaire de Ker u dans $\mathcal{P}_2$ (justifier soigneusement la réponse).
   (c) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
   (d) Soit le polynôme p défini par $p(t) = 5 - 4t + 3t^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
   Exprimer p en fonction de q_0, q_1 et q_2 en utilisant la question précédente.

1. Soient $p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2$ et $w = w_0p_0 + w_1p_1 + w_2p_2$
   — $u(p + w) = ((a_0 + w_0) - (a_1 + w_1), a_2 + w_2) = ((a_0 - a_1) + (w_0 - w_1), a_2 + w_2) = u(p) + u(w)$.
   — $u(\lambda p) = (\lambda a_0 - \lambda a_1, \lambda a_2) = (\lambda(a_0 - a_1), \lambda a_2) = \lambda u(p)$
   donc u est bien linéaire.
2. $u(p_0) = (1, 0)$, $u(p_1) = (-1, 0)$, $u(p_2) = (0, 1)$ d'où la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $p \in \text{Ker } u \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_1 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p = a_0(p_0 + p_1)$.
   $p_0 + p_1 \in \text{Ker } u$ donc $\text{Ker } u = \text{vect} < p_0 + p_1 >$ et $p_0 + p_1 \neq 0$ donc c'est une base de Ker u.
4. D'après la question précédente, on sait que dim Ker $u = 1$ donc dim Im $u = \dim \mathcal{P}_2 - 1 = 2$.
   On a donc dim Im $u = \dim \mathbb{R}^2$ et Im $u \subset \mathbb{R}^2$ d'où Im $u = \mathbb{R}^2$.
5. Im $u = \mathbb{R}^2$ donc u est surjective.
6. Soient $q_0 = p_0$, $q_1 = p_0 + p_1$ et $q_2 = p_0 + p_1 + p_2$.
   (a) $\det(q_0, q_1, q_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc (q_0, q_1, q_2) est une base de $\mathcal{P}_2$.

(b) Sachant que $\text{Ker } u = \text{vect} < q_1 >$, on pose $G = \text{vect} < q_0, q_2 >$.
On a bien $\dim \text{Ker } u + \dim G = 3 = \dim \mathcal{P}_2$.
De plus, $p \in \text{Ker } u \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} p = \alpha_1 q_1 \\ p = \alpha_0 q_0 + \alpha_2 q_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_0 q_0 + \alpha_2 q_2 - \alpha_1 q_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$
car (q_0, q_1, q_2) est une famille libre. On a donc bien $\text{Ker } u \cap G = \{0\}$ d'où $\text{Ker } u \oplus G = \mathcal{P}_2$.

(c) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, il suffit d'exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} q_0 = p_0 \\ q_1 = p_0 + p_1 \\ q_2 = p_0 + p_1 + p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = q_0 \\ p_1 = -q_0 + q_1 \\ p_2 = -q_1 + q_2 \end{cases}$$

On obtient donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $p = 5p_0 - 4p_1 + 3p_2$ donc on peut lui associer le vecteur X correspondant aux coordonnées dans la base $\mathcal{B}$: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Pour obtenir le vecteur coordonnées X' dans la base $\mathcal{B}'$, il suffit de faire le produit $X' = P^{-1}X$:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

D'où $p = 9q_0 - 7q_1 + 3q_2$.

Exercice 3 (*barème approximatif : ...*) **CHANGER DE COPIE**

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, noté $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on note $(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{33})$ sa base canonique (on rappelle que E_{ij} a tous ses coefficients nuls sauf celui de la ligne i colonne j qui vaut 1).

On introduit les sous-espaces vectoriels F et D_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par

$$F = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,:\, M = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & 0 & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad D_3 = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,:\, M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \right\}.$$

1. (a) Déterminer $\dim(F)$ et $\dim(D_3)$.
   (b) En déduire que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = F \oplus D_3$.
2. Le but de cette partie est de démontrer que *toute matrice* $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *de trace nulle peut s'écrire* $M = BC - CB$, *où* B *et* $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ce résultat est en fait valable pour tout $n \in \mathbb{N}$).

   On définit la matrice A par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

et l'application g de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par

$$g(M) = AM - MA$$

(a) Montrer que g est linéaire.

(b) Calculer $g(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(c) Monter que $\mathrm{Im}(g) \subset F$ et que $\mathrm{Ker}(g) = D_3$.

(d) En déduire que $\mathrm{Im}(g) = F$

(e) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{trace}(M) = 0$, on **admet** le résultat suivant :
il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $N \in F$ telles que $M = P^{-1}NP$.

i. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$N = AR - RA.$$

ii. En déduire l'existence de B et $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M = BC - CB$, où $B = P^{-1}AP$.

1. (a) Soit $M \in F$ alors on a

$$M = m_{12}E_{12} + m_{13}E_{13} + m_{21}E_{21} + m_{23}E_{23} + m_{31}E_{31} + m_{32}E_{32} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{3} m_{ij}E_{ij}.$$

Ainsi la famille $(E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{23}, E_{31}, E_{32})$ est une famille génératrice de F. De plus c'est une sous famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc elle est libre. On en déduit que

$$\dim(F) = 6.$$

Par ailleurs pour tout $M \in D_3$ on a

$$M = m_{11}E_{11} + m_{22}E_{22} + m_{33}E_{33} = \sum_{i=1}^{3} m_{ii}E_{ii}.$$

On en conclut que la famille (E_{11}, E_{22}, E_{33}) est une famille génératrice de D_3. C'est également une sous famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc c'est une base de D_3 et on a

$$\dim(D_3) = 3.$$

(b) D'après le cours on a l'équivalence suivante :

$$\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = F \oplus D_3 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \dim(F) + \dim(D_3), F \cap D_3 = \{0\}. \right.$$

La première propriété est une conséquence directe de ce qui précède, on a

$$\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9 = 6 + 3 = \dim(F) + \dim(D_3).$$

Soit à présent $M \in F \cap D_3$, alors M admet des coefficients diagonaux nuls (car $M \in F$) et M admet des coefficients en dehors de la diagonale également nuls (car $M \in D_3$). En conclusion tous les coefficients de M sont nuls et donc

$$F \cap D_3 = \{0\}.$$

2. Soit $g(M) = AM - MA$.

(a) Soient M et $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors on a

$$g(M+N) = A(M+N) - (M+N)A = \big(AM - MA\big) + \big(AN - NA\big) = g(M) + g(N).$$

Soient à présent $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$g(\lambda M) = A(\lambda M) - (\lambda M)A = \lambda(AM - MA) = \lambda g(M).$$

On en déduit que g est linéaire.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} g(M) = AM - MA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 2m_{21} & 2m_{22} & 2m_{23} \\ 3m_{31} & 3m_{32} & 3m_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_{11} & 2m_{12} & 3m_{13} \\ m_{21} & 2m_{22} & 3m_{23} \\ m_{31} & 2m_{32} & 3m_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ainsi on obtient

$$g(M) = \begin{pmatrix} 0 & -m_{12} & -2m_{13} \\ m_{21} & 0 & -m_{23} \\ 2m_{31} & m_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $N \in \mathrm{Im}(g)$ alors il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $N = g(M)$. D'après la question précédente on a

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -m_{12} & -2m_{13} \\ m_{21} & 0 & -m_{23} \\ 2m_{31} & m_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi les coefficients diagonaux de N sont nuls, i.e., $N \in F$. En conclusion on vient de démontrer l'inclusion $\mathrm{Im}(g) \subset F$.
Soit à présent $M \in \mathrm{Ker}(g)$ alors on a

$$g(M) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -m_{12} & -2m_{13} \\ m_{21} & 0 & -m_{23} \\ 2m_{31} & m_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En en déduit que $m_{12} = m_{13} = m_{21} = m_{23} = m_{31} = m_{32} = 0$ et donc que M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $M \in D_3$ et on a l'inclusion $\mathrm{Ker}(g) \subset D_3$. De plus on vient de montrer que la famille (E_{11}, E_{22}, E_{33}) est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(g)$. De plus cette famille est libre comme sous famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 3 = \dim(D_3)$ et donc que $\mathrm{Ker}(g) = D_3$.

(d) D'après le théorème du rang et la question précédente, on a

$$\mathrm{rang}(g) = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(g)) = 9 - 3 = 6.$$

Ainsi $\mathrm{Im}(g) \subset F$ et $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(F) = 6$, on en déduit l'égalité $\mathrm{Im}(g) = F$.

(e) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{trace}(M) = 0$.

i. D'après la propriété admise on a $M = P^{-1}NP$ avec $N \in F$. Comme $F = \mathrm{Im}(g)$ alors $N \in \mathrm{Im}(g)$ et dans ce cas il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant

$$N = g(R) = AR - RA.$$

ii. D'après ce qui précède on a

$$M = P^{-1}NP = P^{-1}(AR - RA)P = P^{-1}ARP - P^{-1}RAP = P^{-1}APP^{-1}RP - P^{-1}RPP^{-1}AP.$$

Finalement on pose $B = P^{-1}AP$ et $C = P^{-1}RP$. On en déduit alors la décomposition recherchée :

$$M = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}RP\right) - \left(P^{-1}RP\right)\left(P^{-1}AP\right) = BC - CB.$$