MT23 - A2023 - Test 2

NOM :

PRENOM :

Groupe ou horaire de TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (5 ; 2,5 ; 2,5). Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α et c sont deux réels.

1. Donner les valeurs propres de A en précisant leurs multiplicités (on discutera suivant les paramètres).
2. **Sans calculer les vecteurs propres** :
   (a) Si α=1, déterminer le rang de $(A - I)$ selon les valeurs de c. En déduire la dimension des sous-espaces propres.
   (b) Si α=2, déterminer le rang de $(A - 2I)$ selon les valeurs de c. En déduire la dimension des sous-espaces propres.
3. En déduire des conditions nécessaires et suffisantes sur α et c pour que A soit diagonalisable.
4. On pose $\alpha = c = 1$, exprimer A^{-1} à l'aide de A^2, A et I.

Exercice 2 Soit $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.
On suppose que B a deux valeurs propres distinctes : λ_1 (simple) et λ_2 (double).
Soit Y_1 un vecteur propre associé à λ_1 et Y_2 un vecteur propre assocé à λ_2.

1. Démontrer que (Y_1, Y_2) est une famille libre.
2. Soit $Z \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{B}' = (Y_1, Y_2, Z)$ soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   On définit l'application linéaire u de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par $u(X) = BX$.
   (a) Quelle est la matrice de u quand on munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de la base canonique ?
   Justifier le résultat.
   (b) Montrer que la matrice de u quand on munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de la base $\mathcal{B}'$ est de la forme
   $$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$
   où on déterminera γ (a et b sont deux réels indéterminés).
   Justifier soigneusement le résultat.

Exercice 3 Questions de cours

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
   (a) Donner la définition de ≪A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ≫.
   (b) Montrer que
   A est diagonalisable dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donner la définition d'une norme sur E.
   (b) Donner la définition de $(y_1, \ldots, y_n)$ est une famille orthonormée de E.