MT23 - A2024 - Test 2 - Corrigé

Exercice 1

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On cherche x solution de $Ax = b$.

   (a) A quel espace appartient x ?

   Correction : $x \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

   (b) A quelle condition a-t-on l'existence d'une solution pour tout $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$? Justifier la réponse.

   Correction : Si $\operatorname{rang}(A) = 3$. En effet, $\operatorname{Im} A \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et l'égalité des dimensions entrainera l'égalité des ensembles.. Donc, si $\operatorname{rang} A = 3$, $\forall b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $b \in \operatorname{Im} A$ et (S) admet au moins une solution.

   (c) S'il existe une solution, peut-elle être unique ? Justifier la réponse.

   Correction : Non car, d'après le théorème du rang, nous avons $\dim(\operatorname{Ker}(A)) + \operatorname{rang}(A) = 4$. Or $\operatorname{rang}(A) \leq 3$ donc nécessairement $\dim(\operatorname{Ker}(A)) \geq 1$. La solution, si elle existe, n'est donc pas unique.
   En effet, $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$ donc $\exists\, x^* \neq 0 \in \operatorname{Ker} A$ tel que $Ax^* = 0$. Soit x solution de (S), alors $A(x + x^*) = Ax + Ax^* = b$ donc $x + x^*$ est encore solution de (S).

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$.

   (a) Donner la définition de «A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ».

   Correction : A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$
   $\Leftrightarrow\ \exists\, D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

   (b) Montrer que 2 matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

   Correction : Si A et A' sont semblables, $\exists\, P$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
   A, A', P et $P^{-1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
   $\pi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - PA'P^{-1}) = \det(\lambda PIP^{-1} - PA'P^{-1}) = \det(P(\lambda I - A')P^{-1})$
   $= \det P \det(\lambda I - A') \det P^{-1} = \det(\lambda I - A') = \pi_{A'}(\lambda)$

   (c) On suppose que A est diagonalisable et admet une unique valeur propre λ, déterminer la matrice A dans ce cas.

   Correction : Si A est diagonalisable, elle est semblable à D avec $D = \lambda I$.
   Donc $A = P(\lambda I)P^{-1} = \lambda PIP^{-1} = \lambda I$.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$.

   Correction :
   $$\pi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1.$$
   On calcule les racines (complexes) de cette équation : $\lambda = i$ ou $\lambda = -i$.

2. (a) Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour déterminer A^{-1} et A^4.

   Correction : D'après le théorème de Cayley Hamilton on a $\pi_A(A) = 0$ c'est à dire $A^2 + I = 0$. On obtient donc
   — $I = -A^2$ et donc $A^{-1} = -A$
   — $A^2 = -I$ et $A^4 = (A^2)^2 = (-I)^2 = I$.

   (b) En déduire A^9.

   Correction : $A^9 = (A^4)^2 \times A = I \times A = A$.

3. (a) Montrer qu'il existe P inversible et D diagonale appartenant à $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Justifier soigneusement la construction de P et D et donner D (on ne demande pas de calculer P pour le moment).

   Correction : A admet deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, d'où l'existence de P et D.
   La matrice diagonale D, semblable à A, contient donc les valeurs propres sur sa diagonale, par exemple $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.
   $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow AP_1 = iP_1$ et $AP_2 = -iP_2$: la matrice P est donc formée des 2 vecteurs propres associés à i et $-i$ respectivement.

   (b) Utiliser la question précédente pour calculer A^9. Comparer avec ce qui a été obtenu précédemment.

   Correction : On peut montrer par récurrence que, $\forall n \geq 1,\ A^n = PD^nP^{-1}$.
   Il suffit alors d'appliquer le résultat avec $n = 9$:
   On calcule $D^9 = \begin{pmatrix} i^9 & 0 \\ 0 & (-i)^9 \end{pmatrix}$. On sait que $i^4 = 1$ donc $i^9 = i$ et $(-i)^9 = -i$.
   D'où $D^9 = D$ et $A^9 = PD^9P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

   (c) Calculer P.

   Correction : $(A - iI)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -iy_1 + y_2 = 0 \\ -y_1 - iy_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y_2 = iy_1 \Leftrightarrow Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.
   Les deux valeurs propres étant conjuguées, les vecteurs le sont aussi et on obtient pour $\lambda = -i$: $Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

   On obtient donc, par exemple, la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. Donner la définition d'un produit scalaire.

   Correction : Un produit scalaire est une application de $E \times E \to \mathbb{R}$ qui à $(\vec{x}, \vec{y})$ associe $< \vec{x}, \vec{y} >$ qui est : $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
   - bilinéaire : $< \alpha\vec{x} + \beta\vec{z}, \vec{y} >= \alpha < \vec{x}, \vec{y} > +\beta < \vec{z}, \vec{y} >$
     et $< \vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z} >= \alpha < \vec{x}, \vec{y} > +\beta < \vec{x}, \vec{z} >$
   - symétrique : $< \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{y}, \vec{x} >$
   - définie positive : $< \vec{x}, \vec{x} >\geq 0$ et $< \vec{x}, \vec{x} >= 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$

2. On définit sur $\mathbb{R}^2$, $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $< x, y >= x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$ et on admet que c'est un produit scalaire.

   (a) Les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ sont-ils orthogonaux pour **ce** produit scalaire ? Justifier la réponse.

   Correction : Des vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.
   $< e_1, e_2 >= 1\times 0+5\times 0\times 1+2\times 1\times 1+2\times 0\times 0 = 2$ donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

   (b) Quelle est la norme associée à **ce** produit scalaire ?
   On ne demande pas de démontrer qu'il s'agit d'une norme.

   Correction : $||x|| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2}$.

   (c) Calculer, avec la norme ainsi définie, la norme du vecteur $(1, 1)$.

   Correction : $||(1, 1)|| = \sqrt{1 + 5 + 4} = \sqrt{10}$.