MT23 - A2024 - Test 2

Nom :

Prénom :

Groupe ou horaire de TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (3 ; 5 ; 2). Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On cherche x solution de $Ax = b$.
   (a) A quel espace appartient x ?
   (b) A quelle condition a-t-on l'existence d'une solution pour tout $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$? Justifier la réponse.
   (c) S'il existe une solution, peut-elle être unique ? Justifier la réponse.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}),\ n \geq 2$.
   (a) Donner la définition de ≪A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ≫.
   (b) Montrer que 2 matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
   (c) On suppose que A est diagonalisable et admet une unique valeur propre λ, déterminer la matrice A dans ce cas.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$.
2. (a) Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour déterminer A^{-1} et A^4.
   (b) En déduire A^9.
3. (a) Montrer qu'il existe P inversible et D diagonale appartenant à $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Justifier soigneusement la construction de P et D et donner D (on ne demande pas de calculer P pour le moment).
   (b) Utiliser la question précédente pour calculer A^9. Comparer avec ce qui a été obtenu pécédemment.
   (c) Calculer P.

Exercice 3

1. Donner la définition d'un produit scalaire.
2. On définit sur $\mathbb{R}^2$, $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $< x, y >= x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$ et on admet que c'est un produit scalaire.
   (a) Les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ sont-ils orthogonaux pour **ce** produit scalaire ?
   Justifier la réponse.
   (b) Quelle est la norme associée à **ce** produit scalaire ?
   On ne demande pas de démontrer qu'il s'agit d'une norme.
   (c) Calculer, avec la norme ainsi définie, la norme du vecteur $(1, 1)$.