MT23 - A2022 - Examen médian - Correction

Exercice 1 (6 points)

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et on note $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ sa base canonique (on rappelle que E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i colonne j qui vaut 1).
Soit $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble commutant de A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent avec A :

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \,/\, AB = BA\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. (0.5/6)
   Correction. La matrice identiquement nulle de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{C}(A)$ donc $\mathcal{C}(A) \neq \emptyset$. On considère B et C deux matrices quelconques de $\mathcal{C}(A)$, alors

   $$A(B + C) = AB + AC = BA + CA = (B + C)A,$$

   d'où $B + C \in \mathcal{C}(A)$. Soit $B \in \mathcal{C}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

   $$A(\lambda B) = \lambda AB = \lambda BA = (\lambda B)A.$$

   Ainsi $\lambda B \in \mathcal{C}(A)$. On en déduit que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

2. Justifier que A est inversible et montrer que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A^{-1})$
   (*indication : on pensera à la multiplication par une matrice convenable*). (1/6)
   Correction. Pour montrer que A est inversible on remarque que $\det(A) = 4 \neq 0$ et donc que A est inversible. Par ailleurs, pour toute matrice $B \in \mathcal{C}(A)$ on a les équivalences suivantes :

   $$\begin{aligned} B \in \mathcal{C}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad AB = BA, \\ &\Leftrightarrow \quad A^{-1}AB = A^{-1}BA, \\ &\Leftrightarrow \quad B = A^{-1}BA, \\ &\Leftrightarrow \quad BA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1}, \\ &\Leftrightarrow \quad BA^{-1} = A^{-1}B, \\ &\Leftrightarrow \quad B \in \mathcal{C}(A). \end{aligned}$$

   Cette suite d'équivalences permet de déduire directement que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A^{-1})$.

3. On cherche à déterminer une base de $\mathcal{C}(A)$.

   (a) Dire si les matrices suivantes appartiennent à $\mathcal{C}(A)$: $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. (0.5/6)
   Correction. On a

   $$AC = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

   donc $C \in \mathcal{C}(A)$. De même, on a

   $$AD = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad DA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

   On en déduit que $D \notin \mathcal{C}(A)$.

(b) Déterminer une base de $\mathcal{C}(A)$. (1/6)

Correction. On raisonne par une suite d'équivalences, on a :

$$\begin{aligned}
B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \quad & AB = BA \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 2a + c & = 2a, \\ 2b + d & = a + 2b, \\ 2c & = 2c, \\ 2d & = c + 2d, \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} c & = 0, \\ a & = d, \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{C}(A)} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{C}(A)}.
\end{aligned}$$

Donc cette suite d'équivalences montre que

$$\mathcal{C}(A) = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Par ailleurs, pour λ et $\beta \in \mathbb{R}$ si

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors nécessairement $\lambda = \beta = 0$. Donc la famille de matrices

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Donc cette famille forme une base de $\mathcal{C}(A)$.

4. Soit $\varphi_A : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'application donnée par

$$\varphi_A(B) = AB - BA, \quad \forall B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Montrer que φ_A est une application linéaire. Quel lien existe-t-il entre $\text{Ker}(\varphi_A)$ et $\mathcal{C}(A)$? (1/6)

Correction. Soient B et $C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, on a

$$\varphi_A(B + C) = A(B + C) - (B + C)A = AB - BA + AC - CA = \varphi_A(B) + \varphi_A(C).$$

Par ailleurs pour tout $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_A(\lambda B) = A(\lambda B) - (\lambda B)A = \lambda (AB - BA) = \lambda \varphi_A(B).$$

On en déduit que φ_A est linéaire. De plus on a les équivalences suivantes :

$$B \in \text{Ker}(\varphi_A) \Leftrightarrow AB - BA = 0 \Leftrightarrow AB = BA \Leftrightarrow B \in \mathcal{C}(A).$$

Donc $\text{Ker}(\varphi_A) = \mathcal{C}(A)$.

5. En déduire $\mathrm{rang}(\varphi_A)$ et déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$. (1/6)
Correction. D'après le théorème du rang et la question précédente on a

$$\mathrm{rang}(\varphi_A) = \dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 4 - \dim(\mathcal{C}(A)) = 4 - 2 = 2.$$

On sait par le cours que l'image par φ_A de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$. Or on a

$$\varphi_A(E_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_{12},$$

$$\varphi_A(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{car } E_{12} \in \mathcal{C}(A),$$

$$\varphi_A(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E_{11} - E_{22},$$

$$\varphi_A(E_{22}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}.$$

Or comme $(E_{12}, E_{11} - E_{22})$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ contenant deux éléments alors c'est une base de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$.

6. Déterminer la matrice représentative de φ_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. (1/6)
Correction. D'après la question précédente on obtient directement que cette matrice s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (4 points)

Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ sa base canonique. Pour tout $p \in \mathcal{P}_2$ de la forme $p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2$, on considère l'application $u : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ définie par

$$u(p) = 2p' - p + a_0\, p_0.$$

1. Montrer que u est linéaire. (0.5/4)
Correction. On remarque que $a_0 = p(0)$, on pourra donc utiliser cette notation.
Soient p et $q \in \mathcal{P}_2$, on a

$$u(p+q) = 2(p+q)' - (p+q) + (p+q)(0)\, p_0 = \big(2p' - p + p(0)p_0\big) + \big(q' - q + q(0)p_0\big) = u(p) + u(q).$$

De plus pour tout $p \in \mathcal{P}_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$u(\lambda p) = 2(\lambda p)' - (\lambda p) + (\lambda p)(0)p_0 = \lambda\left(2p' - p + p(0)p_0\right) = \lambda u(p).$$

Donc u est une application linéaire.

2. Déterminer l'expression de la matrice A représentant u dans la base canonique de $\mathcal{P}_2$. (0.75/4)
Correction. On a

$$\begin{aligned} u(p_0) &= -p_0 + p_0(0)p_0 = -p_0 + p_0 = 0, \\ u(p_1) &= 2p_0 - p_1 + p_1(0)p_0 = 2p_0 - p_1, \\ u(p_2) &= 4p_1 - p_2 + p_2(0)p_0 = 4p_1 - p_2. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{rang}(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$. (1.25/4)
Correction. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} p \in \mathrm{Ker}(u) &\Leftrightarrow u(p) = 0 \quad \text{et} \quad p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2, \\ &\Leftrightarrow 2p' - p + p(0)p_0 = 0 \quad \text{et} \quad p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2, \\ &\Leftrightarrow 2a_1p_0 + 4a_2p_1 - a_0p_0 - a_1p_1 - a_2p_2 + a_0p_0 = 0, \\ &\Leftrightarrow 2a_1p_0 + (4a_2 - a_1)p_1 - a_2p_2 = 0, \\ &\Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0 \quad \text{car } (p_0, p_1, p_2) \text{ famille libre de } \mathcal{P}_2, \\ &\Leftrightarrow p = a_0p_0. \end{aligned}$$

On déduit de cette suite d'équivalences que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\langle p_0 \rangle$. Par ailleurs, d'après le théorème du rang on a

$$\mathrm{rang}(u) = \dim(\mathcal{P}_2) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3 - 1 = 2.$$

D'après le cours on sait que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\langle u(p_0), u(p_1), u(p_2) \rangle$. Or comme $u(p_0) = 0$ (voir question 2) alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\langle u(p_1), u(p_2) \rangle$. Il reste à voir si la famille $(u(p_1), u(p_2))$ est libre dans $\mathcal{P}_2$. Pour ce faire on considère α et $\beta \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{aligned} \alpha u(p_1) + \beta u(p_2) = 0 &\Rightarrow \alpha(2p_0 - p_1) + \beta(4p_1 - p_2) = 0, \\ &\Rightarrow 2\alpha p_0 + (4\beta - \alpha)p_1 - \beta p_2 = 0, \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0 \quad \text{car } (p_0, p_1, p_2) \text{ est une famille libre de } \mathcal{P}_2, \end{aligned}$$

donc $(u(p_1), u(p_2))$ est une famille libre de $\mathcal{P}_2$ et forme une base de $\mathrm{Im}(u)$.

4. Soient $q_0 = p_0$, $q_1 = p_0 + 2p_1$ et $q_2 = 2p_1 + p_2$. On définit la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que Q est inversible et en déduire que $\mathcal{B}' = (q_0, q_1, q_2)$ est une base de $\mathcal{P}_2$. Que représente Q ? (0.5/4)
Correction. On remarque que $\det(Q) = 2 \neq 0$ et donc que Q est inversible. Par ailleurs on remarque également que les colonnes de Q sont constituées des composantes des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, autrement dit

$$\det(q_0, q_1, q_2) = \det(Q) \neq 0.$$

D'après le cours on sait alors que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{P}_2$. De plus Q représente la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

5. Déterminer Q^{-1}. (0.5/4)
Correction. Pour déterminer Q^{-1} on cherche à résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} q_0 &= p_0, \\ q_1 &= p_0 + 2p_1, \\ q_2 &= 2p_1 + p_2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} p_0 &= q_0, \\ p_1 &= (-q_0 + q_1)/2, \\ p_2 &= q_0 - q_1 + q_2. \end{array}\right.$$

On obtient ainsi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. En déduire l'expression de A', la matrice représentant u dans la base $\mathcal{B}'$, en fonction de A, Q et Q^{-1} (on ne demande pas de calculer A'). (0.5/4)
Correction. Pour ce faire on applique directement la formule de changement de bases et on obtient la relation

$$A' = Q^{-1}AQ.$$

Exercice 3 (5 points)

Dans cet exercice, on se propose de calculer le déterminant suivant pour certaines valeurs de n :

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

1. Que vaut $V_n(a_1, \dots, a_n)$ si il existe deux indices distincts $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $a_i = a_j$? (0.5/5)
Correction. Si deux lignes de la matrice sont égales alors $V_n(a_1, \dots, a_n) = 0$.

2. On pose $\underline{n = 2}$, calculer $V_2(a_1, a_2)$. (0.5/5)
Correction. On obtient directement

$$V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1.$$

3. On pose $\underline{n = 3}$.

   (a) En vous aidant des formules $C_i - a_1C_{i-1}$ pour $i = 2$ et 3 (où C_i désigne la colonne i), montrer que

   $$V_3(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)V_2(a_2, a_3). \quad (1/5)$$

   Correction. On a

   $$V_3(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1a_2 \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix}.$$

On obtient ensuite par développement par rapport à la première ligne et par multilinérité du déterminant

$$V(a_1,a_2,a_3) = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) \\ a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)V(a_2,a_3).$$

(b) En déduire $V_3(a_1,a_2,a_3)$. (0.5/5)
Correction. On obtient directement

$$V_3(a_1,a_2,a_3) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2).$$

(c) Application :

i. Calculer la valeur du déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}. \quad (0.5/5)$$

Correction. On a

$$\det(A) = V_3(2,4,3) = (4-2)(3-2)(3-4) = -2$$

ii. Soit $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, justifier que l'équation $Ax = b$ admet une unique solution. (0.5/5)
Correction. Comme $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible et dans ce cas l'unique solution de $Ax = b$ est donnée par $x = A^{-1}b$.

4. On pose $\underline{n=4}$. En vous inspirant des questions précédentes, montrer que

$$V_4(a_1,a_2,a_3,a_4) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\,V_3(a_2,a_3,a_4)$$

et en déduire $V_4(a_1,a_2,a_3,a_4)$. (1.5/5)
Correction. On applique les opérations $C_i - a_1C_{i-1}$ pour $i = 2,3$ et 4, on a

$$\begin{aligned} V_4(a_1,a_2,a_3,a_4) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1a_2 & a_2^3-a_1a_2^2 \\ 1 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1a_3 & a_3^3-a_1a_3^2 \\ 1 & a_4-a_1 & a_4^2-a_1a_4 & a_4^3-a_1a_4^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On développe ensuite par rapport à la première ligne et on obtient

$$V_4(a_1,a_2,a_3,a_4) = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2^2-a_1a_2 & a_2^3-a_1a_2^2 \\ a_3-a_1 & a_3^2-a_1a_3 & a_3^3-a_1a_3^2 \\ a_4-a_1 & a_4^2-a_1a_4 & a_4^3-a_1a_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & a_2^2(a_2-a_1) \\ a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) \\ a_4-a_1 & a_4(a_4-a_1) & a_4^2(a_4-a_1) \end{vmatrix}.$$

Il reste à appliquer la multilinéarité du déterminant pour obtenir

$$V_4(a_1,a_2,a_3,a_4) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \\ 1 & a_4 & a_4^2 \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)V_3(a_2,a_3,a_4).$$

Enfin d'après la question 3(b) on en déduit que

$$V_4(a_1,a_2,a_3,a_4) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3).$$