MT23 - A2021 - Test 1

NOM :

PRENOM :

Groupe ou horaire de TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (3,5 ; 2,5 ; 4,5). Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et on pose

$$F_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 = 0\}.$$

1. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner une base et la dimension de F_1.
3. On pose $F_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 = 0\}$.
   Montrer que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 Soit $u : E \to F$ une application linéaire et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E. On donne les 2 propositions suivantes :

(1) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ famille libre de $E \Rightarrow (u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \dots, u(\vec{e}_n))$ famille libre de F

(2) $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \dots, u(\vec{e}_n))$ famille libre de $F \Rightarrow (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ famille libre de E

1. Quelle proposition est toujours vraie ? La démontrer.
2. A quelle condition l'autre proposition est-elle vraie ? La démontrer sous cette condition.

Exercice 3 Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Calculer $\operatorname{Ker} u$ (en donner une base et la dimension).
3. Calculer $\operatorname{Im} u$ (en donner une base et la dimension).
4. u est-elle injective ? surjective ?
5. Ecrire la matrice A de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ (on expliquera comment elle est construite).