Correction Final MT23 A23

Exercice 1

1\. (a) $A-2I = VU^T = (u_1V \dots u_nV) = \begin{pmatrix} v_1 U^T \\ \vdots \\ v_n U^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_2v_1 & \dots & u_nv_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ u_1v_n & u_2v_n & \dots & u_nv_n \end{pmatrix}$

↳ toutes les colonnes sont proportionnelles à V (ou les lignes à U^T)
donc $\text{rang}(A-2I) \leq 1$ et $VU^T \neq 0$ car U et V non nuls donc rang $= 1$

(b) $\text{trace}(A) = \text{trace}(2I + VU^T) = \text{trace}(2I) + \text{trace}(VU^T)$
$= \text{trace}(2I) + \text{trace}(U^TV)$
$= 2n + \gamma$

(c) D'après (a), $\dim \text{Ker}(A-2I) = n-1$
donc 2 est valeur propre de multiplicité $\geq n-1$
trace A = somme des valeurs propres $= 2(n-1) + 2 + \gamma$
Donc, si $\gamma = 0$ 2 est valeur propre de mult. n
si $\gamma \neq 0$ 2 — — — $n-1$
$2+\gamma$ — — — 1

(d) A est diagonalisable $\iff \dim V_{\lambda_i} = \text{mult}(\lambda_i)$ $i = 1, \dots, p$
Si $\gamma = 0$, $\dim V_2 = n-1 \neq \text{mult}(2) = n$
donc A n'est pas diagonalisable
Si $\gamma \neq 0$, $\dim V_2 = n-1 = \text{mult}(2)$
$\dim V_{2+\gamma} = 1 = \text{mult}(2+\gamma)$ car val. pr. simple
donc A est diagonalisable

2\. $AV = (2I + VU^T)V = 2V + VU^TV = 2V + \gamma V = (2+\gamma)V$ et $V \neq 0$
donc V est vect. pr. de A associé à $2+\gamma$

3\. (a) $AY = 2Y + VU^TY = 2Y$

(b) $AZ = 2Z + VU^TZ = 2Z + V$

4\. (a) Si $\gamma = 0$, $AV = 2V$. De plus, $AY = 2Y$ et $AZ = 2Z + V$.
On a 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de montrer que la famille est libre :
$\alpha Y + \beta V + \gamma Z = 0$
$\Rightarrow \alpha \underbrace{(A-2I)Y}_{=0} + \beta \underbrace{(A-2I)V}_{=0} + \gamma \underbrace{(A-2I)Z}_{=V} = 0$
$\Rightarrow \gamma V = 0$
$\Rightarrow \gamma = 0$ car $V \neq 0$
$\Rightarrow \alpha Y + \beta V = 0$
$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$ car (Y, V) est une famille libre
donc la famille est libre et c'est une base

(b) $AP = A(Y\ V\ Z) = (AY\ AV\ AZ) = (2Y\ 2V\ 2Z+V)$
$= \left(P\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\ P\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\ P\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right) = P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

(c) i. $AP = PT \iff A = PTP^{-1}$

$$x' = Ax \iff x' = PTP^{-1}x$$
$$\iff P^{-1}x' = TP^{-1}x$$
$$\iff z' = Tz \quad \text{où } z = P^{-1}x$$
$$\iff \begin{cases} z'_1 = 2z_1 & (1) \\ z'_2 = 2z_2 + z_3 & (2) \\ z'_3 = 2z_3 & (3) \end{cases}$$

ii. (1) : $z_1(t) = C_1 e^{2t}$

(3) : $z_3(t) = C_3 e^{2t}$

(2) : $z_{2h}(t) = C_2 e^{2t}$

$z_{2p}(t) = \alpha t e^{2t}$, $z'_{2p}(t) = (\alpha + 2\alpha t) e^{2t}$

(2) $\Rightarrow (\alpha + 2\alpha t) e^{2t} = 2\alpha t e^{2t} + C_3 e^{2t}$

$\Rightarrow \alpha = C_3$

d'où $z_2(t) = (C_2 + C_3 t) e^{2t}$

Exercice 2

1. $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = n = \dim \mathcal{M}_{n,1}$ d'après le théorème du rang

$x \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A \iff \begin{cases} Ax = 0 \\ \exists y \text{ tq } x = Ay \end{cases} \Rightarrow A^2 y = 0 \Rightarrow \alpha A y = 0 \Rightarrow \alpha x = 0 \underset{\alpha \neq 0}{\Rightarrow} x = 0$

donc $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$

On a bien $\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A = \mathcal{M}_{n,1}$

2. $\dim \operatorname{Im} A = n - \dim \operatorname{Ker} A \iff q = n - p$

La famille a n éléments, il suffit de montrer qu'elle est libre :

$\alpha_1 \varepsilon_1 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_p + \beta_1 \varepsilon'_1 + \ldots + \beta_q \varepsilon'_q = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 \varepsilon_1 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_p}_{\in \operatorname{Ker} A} = \underbrace{-\beta_1 \varepsilon'_1 - \ldots - \beta_q \varepsilon'_q}_{\in \operatorname{Im} A}$

$\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \varepsilon_1 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_p = 0 \\ \beta_1 \varepsilon'_1 + \ldots + \beta_q \varepsilon'_q = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0 & \text{car } (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) \text{ libre} \\ \beta_1 = \ldots = \beta_q = 0 & \text{car } (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_q) \text{ libre} \end{cases}$

3. $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(A - 0I) = V_0$ donc 0 est valeur propre de multiplicité $\geq p$

$x \in \operatorname{Im} A \iff \exists y$ tq $Ay = x \Rightarrow Ax = A^2 y = \alpha A y = \alpha x$

i.e. $Ax = \alpha x$

donc $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker}(A - \alpha I) = V_\alpha$ et α est valeur propre de mult. $\geq q$.

4. $p + q = n$ donc 0 val. pr. de mult. p et $\dim V_0 = p = \operatorname{mult}(0)$

α —— —— q $\quad \dim V_\alpha = q = \operatorname{mult}(\alpha)$

donc A est diagonalisable

Exercice 3

1. (a) $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$ donc A^TA est symétrique

$x^TA^TAx = (Ax)^TAx = \|Ax\|^2 \geq 0 \quad \forall x$

$x^TA^TAx = 0 \iff Ax = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \iff x = 0$

donc A^TA est symétrique définie positive $\iff$ ses valeurs propres sont >0 et $A^TA \in \mathcal{M}_{2,2}$ donc elle a 2 valeurs propres >0 λ_1 et λ_2

(b) $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A^TA - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 1 = (3-\lambda)(1-\lambda)$ donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 1$

(c) $(A^TA - 3I)Y = 0 \iff -y_1 + y_2 = 0 \iff Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A^TA - I)Y = 0 \iff y_1 + y_2 = 0 \iff Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les 2 vecteurs sont orthogonaux, il suffit de les normer :

$V_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2. (a) $U_i^TU_i = \frac{1}{\lambda_i}(AV_i)^T(AV_i) = \frac{1}{\lambda_i} V_i^TA^TAV_i = \frac{1}{\lambda_i} V_i^T \lambda_i V_i = 1$

$U_1^TU_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}}(AV_1)^T(AV_2) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}} V_1^TA^TAV_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}} V_1^T\lambda_2V_2$

$= \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}} V_1^TV_2 = 0$

(b) $\begin{cases} \|U_3\| = 1 \\ U_1^TU_3 = 0 \\ U_2^TU_3 = 0 \end{cases}$ $\quad U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Soit $U_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + 2b + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3c^2 = 1 \\ b = -c \\ a = c \end{cases} \iff U_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(c) (U_1, U_2, U_3) est une famille orthonormée, donc libre, de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est donc une base.

3. (a) Les matrices U et V ont leurs colonnes orthonormées, ce qui est la définition d'une matrice orthogonale.

(b) $A = U\Sigma V^T \iff \Sigma = U^TAV$ ... il faut calculer ... $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4

1. (a) $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$

$f_2 = y + \alpha e_1$ tq $<f_2, e_1> = 0$ i.e. $\alpha = -<y, e_1>$

$e_2 = \frac{f_2}{\| f_2 \|} = \frac{y - <y, e_1> e_1}{\| y - <y, e_1> e_1 \|}$

(b) $x = \|x\| e_1 \Rightarrow <x, e_1> = \|x\| <e_1, e_1> = \|x\|$

d'où $x = <x, e_1> e_1$

$y = \| y - <y, e_1> e_1 \| e_2 + <y, e_1> e_1$

$\Rightarrow <y, e_2> = \| y - <y, e_1> e_1 \| \underbrace{<e_2, e_2>}_{=1} + <y, e_1> \underbrace{<e_1, e_2>}_{=0} = \| y - <y, e_1> e_1 \|$

d'où $y = <y, e_2> e_2 + <y, e_1> e_1$

(c) $x = \mu_0 e_1$ et $y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$

Cauchy-Schwartz : $<x, y>^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$

d'où $(\mu_0 \mu_1)^2 \leq \mu_0^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2) \iff \mu_1^2 \leq \mu_1^2 + \mu_2^2$ car $\mu_0 \neq 0$

2. Si la famille est libre, on a forcément $\mu_2 \neq 0$ donc l'inégalité est stricte

3. Il faut donc que (x, y) ne soit pas libre, i.e. x et y colinéaires