MT23 - A2024 - Test 1

Nom :

Prénom :

Groupe ou horaire de TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (3 ; 2,5 ; 4,5). Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 Soit u une application linéaire de E dans F.

1. Donner la définition de $\operatorname{Ker} u$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel (on précisera de quel espace vectoriel).
3. Montrer l'équivalence : u injective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$.

Exercice 2 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles.
On pose $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, -1)$ et $\vec{v}_3 = (-1, 1, 3)$.

1. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est-elle libre ? Si oui le démontrer, si non donner la relation qui les lie.
2. On pose $F_1 = \text{vect} < \vec{v}_1 >$ et $F_2 = \text{vect} < \vec{v}_2 >$.
   (a) Calculer $F_1 \cap F_2$.
   (b) Que peut-on alors dire de F_1 et F_2 ?

Exercice 3 On rappelle que (p_0, p_1, p_2) est la base canonique de $\mathcal{P}_2$ où $p_k(t) = t^k,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{P}_2$ définie par

$$u(x_1, x_2) = x_1 p_0 + x_2 p_1 + (x_1 - x_2) p_2 \qquad \forall \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Sans calcul, dire si u peut être bijective (justifier la réponse).
3. Déterminer $\operatorname{Ker} u$.
4. u est-elle injective ?
5. Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Im} u$.
6. Ecrire la matrice A représentant l'application u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{P}_2$ (on expliquera comment A est construite).