MT23-P2025 - Examen final

Durée : 2 heures.

Aucun outil numérique – pas de documents

RÉDIGER LES EXERCICES 1 et 2 SUR UNE COPIE
ET LES EXERCICES 3 et 4 SUR UNE AUTRE COPIE.

La justification des réponses est primordiale. Prouvez ce que vous énoncez.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 3,5 points)*

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit n un entier non-nul. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|_2$. Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (où $n \geq 1$).

1. Soient y_1 et y_2 deux vecteurs propres pour A associés à des valeurs propres distinctes μ_1 et μ_2. Montrer que y_1 et y_2 sont orthogonaux.
   Indication : on pourra calculer $\langle y_1, Ay_2 \rangle$ de deux façons différentes.
2. (a) Donner la définition de Q matrice orthogonale.
   (b) Montrer que Q conserve la norme euclidienne.
   (c) Soit λ une valeur propre de Q. Donner, en le prouvant, la valeur de $|\lambda|$.
3. Donner l'énoncé du théorème de diagonalisation des matrices symétriques.
   On attend **deux** *caractérisations.*

Exercice 2 : *(barème approximatif : 3 points)*

Il est indispensable de prouver les réponses.

On se donne un réel a. Soit la forme quadratique

$$q_a(x) = x_1^2 + (1+a)x_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3.$$

1. Faire la réduction de Gauss en carrés.
2. Donner, en le justifiant, des conditions sur a pour que q_a soit définie positive ou semi-définie positive.

CHANGEZ DE COPIE

Exercice 3 : *(barème approximatif : 11 points)*

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Donner les valeurs propres de A.
2. En déduire sans calculer les vecteurs propres que A n'est pas diagonalisable.
3. On note $B = A - 2I_3$. Calculer B^2.
4. Déterminer une base $\{y_1, y_2\}$ de $\ker(B)$.
5. Prouver qu'il existe z tel que $z \in \ker(B^2)$ et $z \notin \ker(B)$.
6. Montrer que pour un tel z, la famille $\{y_1, y_2, z\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Démontrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} z \in \ker(B^2) \\ z \notin \ker(B) \end{array} \right. \iff \exists y \text{ vecteur propre de } A, \text{ tel que } Bz = y.$$

8. Déterminer un z vérifiant $z \in \ker(B^2)$ et $z \notin \ker(B)$.
   Indication : le y n'est pas forcément le y_1 ou le y_2 : il peut être une combinaison linéaire (simple) de y_1 et y_2.
9. Calculer $f(z)$, puis écrire la matrice A' de f dans la base $\{y_1, y_2, z\}$ et la matrice de passage P associée.
   Écrire la relation entre A et A'.
10. Calculer A^k en fonction de I_3 et de B, pour tout $k \geq 1$.

RÉDIGEZ SUR UNE COPIE SÉPARÉE DES EXERCICES 1 et 2.

Exercice 4 : *(barème approximatif : 11 points)*

Prouvez ce que vous énoncez.

Soit $n \geq 0$ et soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. On pose $\{p_0, p_1, p_2, \dots, \} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{1, X, X^2, \dots\}$ la base canonique de $\mathcal{P}_n$.

On définit ϕ sur $\mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n$ par :

$$\phi(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt \tag{1}$$

(on intègre sur $[-1, 1]$).

1. Calculer pour tout $k \geq 0$: $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^{2k}dt$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^{2k+1}dt$.

2. (a) Donner les conditions pour que ϕ soit un produit scalaire sur $\mathcal{P}_n$.

   (b) Démontrer ces conditions.

   (c) Dorénavant, on notera $\langle p, q\rangle = \phi(p, q)$ le produit scalaire (1) sur $\mathcal{P}_n$, et $\|\cdot\|$ la norme associée.
   Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour ce produit scalaire. *(On ne demande pas de la démontrer.)*

   (d) En déduire une inégalité entre $\displaystyle\left(\int_{-1}^{1} p(t)dt\right)^2$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} p^2(t)dt$.

3. On rappelle le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt. Pour $k \geq 0$:

$$\tilde{z}_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, z_i\rangle z_i, \text{ et } z_{k+1} = \frac{\tilde{z}_{k+1}}{\|\tilde{z}_{k+1}\|}.$$

   (a) Montrer que si $\{z_1, \dots, z_k\}$ est orthonormée, alors $\tilde{z}_{k+1}$ est orthogonale à tous les z_j, pour $j = 1, \dots, k$.

   (b) On prend $n = 2$. Utiliser le procédé de Gram–Schmidt pour calculer une base orthonormée $\{q_0, q_1, q_2\}$ de $\mathcal{P}_2$ à partir de $\{p_0, p_1, p_2\}$ avec le produit scalaire (1).
   Indication : on donne $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45}$.

   (c) On pose $F = \mathrm{Vect}(q_2)$. Montrer que $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \oplus F$ et que $F = \mathcal{P}_1^{\perp}$.

   (d) Soit le polynôme $p = X^2 + 1$. Écrire p dans la base $\{q_0, q_1, q_2\}$, puis calculer sa norme $\|p\|$ avec la norme associée au produit scalaire (1).