MT23-P2025 - Examen médian
Durée : 1 heure 30 min.
Aucun outil numérique – pas de documents

RÉDIGER L'EXERCICE 1 et LES EXERCICES 2 et 3 SUR DES COPIES DIFFÉRENTES.

La justification des réponses est primordiale. Prouvez ce que vous énoncez.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 9 points)*

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soient n un entier non nul. Soit E un espace vectoriel réel, de dimension $\dim E = n$. On prend une base $\mathcal{B} \overset{\text{déf.}}{=} \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de E. Pour tout vecteur $\vec{x}$, on notera $(x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$ les composantes de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$.

1. Soit F un espace vectoriel réel et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que Ker(u) est un sous-espace vectoriel de E.

   Réponse : Je ne mets pas les flèches sur les vecteurs. Cf. cours. Car $u(0) = 0$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in$ Ker(u), alors par linéarité $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = 0 + 0 = 0$, donc 0 et $\lambda x + \mu y$ sont dans Ker(u). □

2. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
   Dire, sans démonstration, si $E_1 \cap E_2$ est un espace vectoriel.
   Même question pour $E_1 \cup E_2$.

   Réponse : Cf. cours. $E_1 \cap E_2$ est un espace vectoriel, mais en général $E_1 \cup E_2$ non. □

3. Soit $\vec{a} \in E$. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$, définie par $\vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

   (a) Montrer que φ est une application linéaire.

   Réponse : pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$ (qui s'écrivent respectivement $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{p} y_i$ dans $\mathcal{B}$), le vecteur $\lambda x + \mu y$ s'écrit dans la base $\mathcal{B}$: $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i + \mu y_i)\vec{e}_i$. Donc par linérat é de la somme finie, $\varphi(\lambda x + \mu y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$. Donc φ est une forme linéaire (car à valeurs dans $\mathbb{R}$). □

   (b) Donner la matrice M associée à φ dans la base $\mathcal{B}$ de E.

   Réponse : on a $\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j$ ("δ_{ij}" est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon). Donc M est une matrice ligne qui s'écrit : $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}$. □

   (c) Soit $\mathcal{C} \overset{\text{déf.}}{=} \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n\}$ une autre base de E.
   On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Donner les propriétés de P.
   Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, exprimer $\vec{f}_j$ dans la base $\mathcal{B}$ avec les éléments de P.

   Réponse : Cf. cours. Les colonnes de P sont les composantes de $\vec{f}_j$ écrites dans la base $\mathcal{B}$, soit $\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{e}_i$. On sait que P est inversible. □

   (d) Calculer $\varphi(\vec{f}_j)$ et donner la matrice N associée à φ dans la base $\mathcal{C}$.

   Réponse : en utilisant la linéarité de φ, il vient $\varphi(\vec{f}_j) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\varphi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} a_i$. Donc $N = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_{i1} a_i & \sum_{i=1}^{n} p_{i2} a_i & \ldots & \sum_{i=1}^{n} p_{in} a_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}$. □

(e) Quelle relation lie M, N et P ? Expliquer. Réponse : Cela s'écrit encore par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ $\varphi(\vec{f_j}) = \sum_{i=1}^n a_i p_{ij}$, c'est exactement la $j$ème composante du produit MP (les dimensions sont cohérentes). On a donc $N = MP$. En fait, c'est la formule $A' = Q^{-1}AP$ du cours (cf. Théorème 2.2.2), adaptée au cas où l'espace d'arrivée $F = \mathbb{R}$ et où on ne change pas de base à l'arrivée (on prend comme bases $\mathcal{F} = \mathcal{F}' = \{1\}$ pour F, donc $Q = Q^{-1} = [1]$). $\square$

4. Soit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Déduire des questions précédentes que

$$G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n b_i x_i = 0 \right\}$$

est un espace vectoriel.
Note : il n'y a pas besoin de faire de calculs pour répondre à cette question.

Réponse : on pose $\varphi_a(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ et $\varphi_b(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i$, qui sont linéaires (cf. 3.a)). G est donc l'intersection de $\mathrm{Ker}(\varphi_\mathrm{a})$ et de $\mathrm{Ker}(\varphi_\mathrm{b})$ qui sont tous les deux des sous-espaces vectoriels (cf. 1), ce qui implique (cf. 2)) que G est un seV.

On appelle $\mathrm{Ker}(\varphi_\mathrm{a})$ un hyperplan, par analogie à la dimension $n = 3$.. $\square$

5. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire non nulle.

(a) Donner, en le prouvant, le rang de φ.

Réponse : on sait que le rang est la dimension de l'image. Comme φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$. φ est non-nulle, donc il existe $y \in E$ tel que $\varphi(y) \neq 0$, donc $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \{0\}$. On en déduit que $\mathrm{rang}(()\varphi) = 1$ (et donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(y) = \mathbb{R}$). $\square$

(b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Réponse : le théorème du rang appliqué à cette forme linéaire non nulle donne $\dim(E) = n = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rang}(\varphi)$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n - 1$. $\square$

(c) Soit $\vec{y} \in E$, tel que $\varphi(\vec{y}) \neq 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(\vec{y})$.

Réponse : soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Vect}(y)$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$ et $\varphi(x) = 0$. Par linéarité, on déduit $\lambda\varphi(y) = 0$, et comme $\varphi(y) \neq 0$, on obtient $\lambda = 0$ et $x = 0$. On déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Vect}(y) = \{0\}$ et donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Vect}(y)$ sont en somme directe. Posons $F = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(y)$.
On remarque que $\dim(Vecty) = 1$, car y est nécessairement non nul (sinon $\varphi(y)$ serait nul), donc $\{y\}$ est libre (1 seul vecteur non nul) et générateur de $\mathrm{Vect}(y)$: c'est une base à 1 élément).
On a F seV de E et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Vect}(y)) = n - 1 + 1 = \dim(E)$, donc on déduit que $F = E$, soit $E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(y)$.

$\square$

(d) Calculer $\varphi(\vec{e_i})$ en fonction de $\varphi(\vec{y})$.

Réponse : pour tout i, $\vec{e_i}$ appartient à $E\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(y)$, donc il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ et $\vec{b_i} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ (qui sont uniques) tels que $\vec{e_i} = \mu_i y + \vec{b_i}$. Par linéarité, on a $\varphi(\vec{e_i}) = \mu_i\varphi(y) + \mu\varphi(\vec{b_i}) = \mu_i\varphi(y)$ $\square$

(e) En déduire qu'il existe $\vec{a} \in E$ tel que $\varphi(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i$.

Réponse : pour tout $x \in E$ écrit dans la base $\mathcal{B}$, on obtient par linéarité $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i \varphi(y)$. En posant $\vec{a} \overset{\text{déf.}}{=} \varphi(y) \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}$, on obtient $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. $\square$

Exercice 2 : *(barème approximatif : 9 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Prouvez ce que vous énoncez.

Soient n, p deux entiers non nuls. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, et pour $i \in \{1, \dots, p\}$ soit F_i un sous-espace vectoriel de E. Pour un sous-ensemble J non-vide de $\{1, \dots, p\}$, on note

$$\sum_{j \in J} F_j \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ \vec{x} \in E \mid \forall j \in J \; \exists \vec{f_j} \in F_j \text{ et } \vec{x} = \sum_{j \in J} \vec{f_j} \right\},$$

et si J est vide, on notera $\displaystyle\sum_{j \in \emptyset} F_j \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\vec{0}\}$.

1. Soit $J \subset \{1, \dots, p\}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{j \in J} F_j$ est un sous-espace vectoriel de E.

   Réponse : Si $J = \emptyset$, alors $\{\vec{0}\}$ est bien un seV de E.

   Sinon :
   1) $\vec{0} = \sum_{j \in J} \vec{0}$ appartient à $\sum_{j \in J} F_j$, car chaque F_j contient 0, car c'est un seV.
   Je ne mets plus les flèches.

   2) Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, x' \in \sum_{j \in J} F_j$, pour tout $j \in J$, il existe f_j et f'_j dans F_j tels que $x = \sum_{j \in J} f_j$ et $x' = \sum_{j \in J} f'_j$. On déduit immédiatement que $\lambda x + \mu y = \sum_{j \in J} (\lambda f_j + \mu f'_j)$ qui appartient à $\sum_{j \in J} F_j$, car $\lambda f_j + \mu f'_j \in F_j$ car c'est un seV. $\square$

2. Pour cette question uniquement, on prend $p = 2$.

   (a) Donner sans démonstration la relation entre la dimension de $F_1 + F_2$ et celles de F_1 et F_2.

   Réponse : Cf. cours. $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_3)$. $\square$

   (b) Donner d'après le cours des conditions nécessaires et suffisantes pour que $E = F_1 \oplus F_2$ (pas de démonstration demandée). *On en attend trois.*

   Réponse : Cf. cours. On a

$$\begin{aligned} E = F_1 \oplus F_2 &\iff \forall x \in E, \; \exists! f_1 \in F_1 \text{ et } f_2 \in F_2 \text{ tels que } x = f_1 + f_2, \\ &\iff E = F_1 + F_2 \text{ et } F_1 \cap F_2 = \{0\} \\ &\iff \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) \text{ et } F_1 \cap F_2 = \{0\} \\ &\iff \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) \text{ et } E = F_1 + F_2. \end{aligned}$$

   $\square$

3. Pour cette question uniquement, on prend $E = \mathcal{P}_3$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Soit quatre polynômes dans $\mathcal{P}_3$:

$$\begin{cases} p_0 = X(X-1)(X-2), & p_1 = (X+1)(X-1)(X-2), \\ p_2 = X^2, & p_3 = 3X - 2, \end{cases}$$

   Pour cette question, on pose : $F_1 = \text{Vect}(p_0, p_1)$, $F_2 = \text{Vect}(p_2)$ et $F_3 = \text{Vect}(p_3)$.

   (a) Déterminer en le justifiant les dimensions de F_1, F_2 et F_3.
   Comparer avec la dimension de E.

Réponse : On montre que $\{p_0, p_1\}$, $\{p_2\}$ et $\{p_3\}$ sont des familles libres. On note que p_0 et p_1 sont des polynômes de Lagrange (à une constante multiplicative près), s'annulant en 3 points.

Soient des scalaires μ_0 et μ_1 tels que $\mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0$. On évalue ce polynôme en $x = 0$ et en $x = -1$ pour obtenir $2\mu_1 = 0$ et $-6\mu_0 = 0$, et donc $\mu_0 = \mu_1 = 0$. Donc $\{p_0, p_1\}$ est libre.

$\{p_2\}$ et $\{p_3\}$ sont également des familles libres, car constituées d'un seul vecteur non nul.

Par définition de $\mathrm{Vect}(\cdot)$, ce sont aussi des familles génératrices, donc ce sont des bases.

On obtient $\dim(F_1) = 2$ et $\dim(F_2) = \dim(F_3) = 1$, et donc $\dim(E) = \dim(\mathcal{P}_3) = 4 = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dim(F_3)$. □

(b) Montrer que $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_3 \cap F_1 = \{\vec{0}\}$.

Réponse : soit $P \in F_1 \cap F_2$. Il existe μ_0, μ_1 et μ_2 tels que $P = \mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 = \mu_2 p_2$. En évaluant P en $x = 0$, on obtient $\mu_1 = 0$, puis en $x = 1$ on obtient $\mu_2 = 0$ et donc $P = 0$. On a bien $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$.

De même, soit $P \in F_1 \cap F_3$. Il existe μ_0, μ_1 et μ_3 tels que $P = \mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 = \mu_3 p_3$. En évaluant P en $x = 1$, on obtient $\mu_3 = 0$, donc $P = 0$. On a bien $F_1 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$.

Enfin, soit $P \in F_2 \cap F_3$. Il existe μ_2 et μ_3 tels que $P = \mu_2 p_2 = \mu_3 p_3$. En évaluant P en $x = 0$, on obtient $-2\mu_3 = 0$, donc $P = 0$. On a bien $F_2 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$.

□

(c) Exprimer $p_0 - p_1$ en fonction de p_2 et p_3.

Réponse : on obtient en développant

$$p_0 - p_1 = X^3 - 3X^2 + 2X - (X^3 - 2X^2 - X + 2) = -X^2 + 3X - 2 = -p_2 + p_3.$$

□

(d) Que peut-on dire de la famille (p_0, p_1, p_2, p_3) ?
En déduire que $E \neq F_1 + F_2 + F_3$.

Réponse : la famille (p_0, p_1, p_2, p_3) est liée (car $p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 0$). Comme c'est une famille de 4 éléments dans $\mathcal{P}3$ qui est de dimension 4, elle ne peut pas être génératrice. En effet, sinon elle serait aussi une base, donc libre, ce qui est faux.

Par conséquent, il existe Q dans $\mathcal{P}_3$ qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}((p_0, p_1, p_2, p_3))$. C'est-à-dire que pour tout $(\mu_0, \mu_1, \mu_2 \mu_3)$ dans $\mathbb{R}^4$, on a $Q \neq (\mu_0 p_0 + \mu_1 p_1) + \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3$, donc $Q \notin F_1 + F_2 + F_3$. On conclut que $E \neq F_1 + F_2 + F_3$.

Remarque : on observe qu'on a dans ce cas $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dim(F_3)$, et $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_3 \cap F_1 = \{\vec{0}\}$, mais pourtant $E \neq F_1 + F_2 + F_3$. Cela signifie qu'on ne peut pas généraliser la somme directe avec $p \geq 2$ seV avec seulement l'intersection des seV 2 à 2. Le bon cadre est donné par l'équivalence qui suit… □

4. Montrer l'équivalence

$$\left\{\begin{array}{l} E = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i \quad \text{et} \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, F_i \cap \left(\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{p} F_j \right) = \{\vec{0}\}, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \forall \vec{x} \in E,\ \exists! (\vec{f_i})_{i \in \{1,\dots,p\}} \in F_1 \times \cdots \times F_p, \\ \text{t.q.} \quad \vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \vec{f_i}. \end{array}\right. \tag{1}$$

Réponse : on montre l'équivalence en prouvant séparément chaque implication.

Sens $\Rightarrow$ *:* on doit prouver 2 choses, l'existence et l'unicité.
Existence : c'est immédiat. En effet, soit $x \in E$. D'après l'hypothèse, $x \in \sum_{i=1}^{p} F_i$, donc il existe $(\vec{f_i})_{i\in\{1,\ldots,p\}} \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \vec{f_i}$.
Unicité : soit $x \in E$. Si il existe $(\vec{f_j})_{j\in\{1,\ldots,p\}}$ et $(\vec{f_j'})_{j\in\{1,\ldots,p\}}$ dans $F_1 \times \cdots \times F_p$, tels que $x = \sum_{j=1}^{p} \vec{f_j} = \sum_{j=1}^{p} \vec{f_j'}$, alors on fixe un $i \in \{1,\ldots,p\}$ et on pose $y \overset{\text{déf.}}{=} \vec{f_i} - \vec{f_i'}$. On a évidemment $y = \sum_{j=1,j\neq i}^{p} \vec{f_j'} - \sum_{j=1,j\neq i}^{p} \vec{f_j}$. Comme F_i et $\sum_{j=1,j\neq i}^{p} F_j$ sont des seV (cf. question 1)), y est à la fois dans F_i et dans $\sum_{j=1,j\neq i}^{p} F_j$, dont l'intersection est $\{0\}$ par hypothèse. Donc $y = 0$ et $\vec{f_i} - \vec{f_i'}$.
Comme c'est vrai pour tout i, on a bien l'unicité.

Sens $\Leftarrow$ *:* on a encore 2 choses à prouver.
$E = \sum_{i=1}^{p} F_i$ *:* c'est immédiat d'après l'hypothèse.
Intersection nulle : Soit $i \in \{1,\ldots,p\}$. On doit prouver une égalité ensembliste. L'inclusion $\{\vec{0}\} \subset F_i \cap \left(\sum_{j=1,j\neq i}^{p} F_j\right)$ est immédiate, car $\sum_{j=1,j\neq i}^{p} F_i$ est un seV (cf. 1)), et l'intersection de 2 seV est un seV, et que 0 est dans tout seV.
Inclusion dans l'autre sens. Soit $x \in F_i \cap \left(\sum_{j=1,j\neq i}^{p} F_j\right)$. Il existe donc $\vec{f_i} \in F_i$ et pour tout $j \in \{1,\ldots,p\} \setminus \{i\}$ il existe $\vec{f_j}$ dans F_j, tels que $x = \vec{f_i} = \sum_{j=1,j\neq i}^{p} \vec{f_j}$. On déduit que $0 = -\vec{f_i} + \sum_{j=1,j\neq i}^{p} \vec{f_j} = 0_{F_i} + \sum_{j=1,j\neq i}^{p} 0_{F_j}$, où chaque 0 est pris dans F_i ou dans F_j ($j \neq i$). Par hypothèse, l'unicité de l'écriture de $0 \in E$ prouve que $\vec{f_j} = 0$ pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$. Donc $x = 0$ et l'intersection est nulle. □

5. On suppose que le membre de gauche de l'équivalence (1) est vérifiée. Dans ce cas, on note $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Pour $i \in \{1,\ldots,p\}$, soit $n_i \geq 1$ la dimension de F_i et $\mathcal{B}_i \overset{\text{déf.}}{=} \{\vec{g}_1^{\,i},\ldots,\vec{g}_{n_i}^{\,i}\}$ une base de F_i. Montrer que $\mathcal{B} \overset{\text{déf.}}{=} \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ est une base de E.

   Réponse : Pour prouver que $\mathcal{B}$ soit une base, il suffit de montrer que c'est une famille libre et génératrice de E.

   Génératrice : soit $x \in E$. D'après (1), il existe $(\vec{f_i})_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ (unique) dans $F_1 \times \cdots \times F_p$, tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \vec{f_i}$. Pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$, $\vec{f_i}$ est dans F_i, dont une base est $\mathcal{B}_i$, qui est donc génératrice de F_i. Donc il existe $(\mu_k^i)_{k=1,\ldots,n_i}$ dans $\mathbb{R}^{n_i}$ tels que $\vec{f_i} = \sum_{k=1}^{n_i} \mu_k^i \vec{g}_k^{\,i}$. On déduit $x = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_i} \mu_k^i \vec{g}_k^{\,i}$ qui est dans $\mathrm{Vect}(\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i)$. Donc $\mathcal{B}$ est génératrice de E.

   Libre : pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$, soit $(\mu_k^i)_{k=1,\ldots,n_i}$ dans $\mathbb{R}^{n_i}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_i} \mu_k^i \vec{g}_k^{\,i} = 0$. On a donc $\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_i} \mu_k^i \vec{g}_k^{\,i} = \sum_{i=1}^{p} 0_{F_i}$. Par unicité de l'écriture de 0 dans $E = \sum_{i=1}^{p} F_i$, on obtient pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$ que $\sum_{k=1}^{n_i} \mu_k^i \vec{g}_k^{\,i} = 0$. Comme $\mathcal{B}_i$ est libre (c'est une base de F_i), cela implique que pour tout $k \in\in \{1,\ldots,n_i\}$, $\mu_k^i = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est libre.

   Donc $\mathcal{B}$ est une base de E. □

6. En déduire une relation entre la dimension de E et celles des F_i.

   Réponse : comme $\mathcal{B}$ est une base de E, on a

$$\dim(E) = \mathrm{card}(\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{card}(\mathcal{B}_i) = \sum_{i=1}^{p} n_i = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

   On peut noter que comme $\mathcal{B}$ est libre, elle ne contient pas de doublon, et donc son cardinal est bien la somme de n_i éléments.

Remarque : la généralisation de somme directe à $p \geq 3$ seV nécessite de vérifier que l'intersection de chaque seV avec la *somme des autres* est réduite à zéro. Dans ce cas, on a bien décomposition unique et l'égalité attendue sur les dimensions ci-dessus.

$\square$

Exercice 3 : *(barème approximatif : 3 points)*
Il est indispensable de prouver les réponses.

1. Soit A, B, C, D quatre vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^3$. On notera $(a_i)_{i=1,2,3}$ les composantes de A (et de la même façon pour B, C et D). On suppose que l'on sait que
$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2+\beta_2 & \gamma_2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{pmatrix}. \tag{2}$$
Montrer que $\det\big(A+B \mid C \mid D\big) = \det\big(A \mid C \mid D\big) + \det\big(B \mid C \mid D\big)$, en développant le déterminant suivant la première ligne.
Réponse : d'après le cours, et en utilisant (2) pour les 2 derniers termes, il vient
$$\begin{aligned}
\det\big(A+B \mid C \mid D\big) &= \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 & d_1\\ a_2+b_2 & c_2 & d_2\\ a_3+c_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}\\
&= (a_1+b_1)\begin{vmatrix} c_2 & d_2\\ c_3 & d_3\end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} a_2+b_2 & d_2\\ a_3+c_3 & d_3\end{vmatrix} + d_1\begin{vmatrix} a_2+b_2 & c_2\\ a_3+c_3 & c_3\end{vmatrix}\\
&= a_1\begin{vmatrix} c_2 & d_2\\ c_3 & d_3\end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} a_2 & d_2\\ a_3 & d_3\end{vmatrix} + d_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}\\
&\quad +b_1\begin{vmatrix} c_2 & d_2\\ c_3 & d_3\end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} b_2 & d_2\\ c_3 & d_3\end{vmatrix} + d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ c_3 & c_3\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1\\ b_2 & c_2 & d_2\\ b_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}\\
&= \det\big(A \mid C \mid D\big) + \det\big(B \mid C \mid D\big).
\end{aligned}$$
□

2. Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$
On donne $\det M = 10$ (on ne demande pas de calculer ce déterminant).

   (a) Donner sans calcul mais **avec des justifications** la valeur de $\det N$, où
$$N = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3\\ 3 & 3 & -6\\ -9 & -3 & 6\end{pmatrix}.$$
Réponse : on observe que $N = 3M$, et donc la n-linéarité du déterminant donne $\det N = 3^n \det M = 27 \det M = 270$. □

   (b) Donner sans calcul mais **avec des justifications** la valeur de $\det P$, où
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$
Réponse : on observe que P est issue de la matrice M après l'échange des colonnes 2 et 3 de M : $P = \big(M_1 \mid M_3 \mid M_2\big)$. D'après le cours, si on permute 2 colonnes, le déterminant change de signe, donc $\det P = -\det M = -10$. □