MT23-P2025 - Examen médian

Durée : 1 heure 30 min.

Aucun outil numérique – pas de documents

RÉDIGER L'EXERCICE 1 et LES EXERCICES 2 et 3
SUR DES COPIES DIFFÉRENTES.

La justification des réponses est primordiale. Prouvez ce que vous énoncez.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 9 points)*

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soient n un entier non nul. Soit E un espace vectoriel réel, de dimension $\dim E = n$. On prend une base $\mathcal{B} \overset{\text{déf.}}{=} \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de E. Pour tout vecteur $\vec{x}$, on notera $(x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$ les composantes de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$.

1. Soit F un espace vectoriel réel et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que Ker(u) est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
   Dire, sans démonstration, si $E_1 \cap E_2$ est un espace vectoriel.
   Même question pour $E_1 \cup E_2$.

3. Soit $\vec{a} \in E$. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$, définie par $\vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

   (a) Montrer que φ est une application linéaire.

   (b) Donner la matrice M associée à φ dans la base $\mathcal{B}$ de E.

   (c) Soit $\mathcal{C} \overset{\text{déf.}}{=} \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n\}$ une autre base de E.
   On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Donner les propriétés de P.
   Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, exprimer $\vec{f}_j$ dans la base $\mathcal{B}$ avec les éléments de P.

   (d) Calculer $\varphi(\vec{f}_j)$ et donner la matrice N associée à φ dans la base $\mathcal{C}$.

   (e) Quelle relation lie M, N et P ? Expliquer.

4. Soit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Déduire des questions précédentes que

$$G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0 \right\}$$

   est un espace vectoriel.
   Note : il n'y a pas besoin de faire de calculs pour répondre à cette question.

5. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire non nulle.

   (a) Donner, en le prouvant, le rang de φ.

   (b) En déduire la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$.

   (c) Soit $\vec{y} \in E$, tel que $\varphi(\vec{y}) \neq 0$. Montrer que $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Vect}(\vec{y})$.

   (d) Calculer $\varphi(\vec{e}_i)$ en fonction de $\varphi(\vec{y})$.

   (e) En déduire qu'il existe $\vec{a} \in E$ tel que $\varphi(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 9 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Prouvez ce que vous énoncez.

Soient n, p deux entiers non nuls. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, et pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ soit F_i un sous-espace vectoriel de E. Pour un sous-ensemble J non-vide de $\{1, \ldots, p\}$, on note

$$\sum_{j \in J} F_j \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ \vec{x} \in E \mid \forall j \in J \ \exists \vec{f_j} \in F_j \text{ et } \vec{x} = \sum_{j \in J} \vec{f_j} \right\},$$

et si J est vide, on notera $\displaystyle\sum_{j \in \emptyset} F_j \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\vec{0}\}$.

1. Soit $J \subset \{1, \ldots, p\}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{j \in J} F_j$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Pour cette question uniquement, on prend $p = 2$.

   (a) Donner sans démonstration la relation entre la dimension de $F_1 + F_2$ et celles de F_1 et F_2.

   (b) Donner d'après le cours des conditions nécessaires et suffisantes pour que $E = F_1 \oplus F_2$ (pas de démonstration demandée). *On en attend trois.*

3. Pour cette question uniquement, on prend $E = \mathcal{P}_3$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Soit quatre polynômes dans $\mathcal{P}_3$:

$$\begin{cases} p_0 = X(X-1)(X-2), & p_1 = (X+1)(X-1)(X-2), \\ p_2 = X^2, & p_3 = 3X - 2, \end{cases}$$

   Pour cette question, on pose : $F_1 = \text{Vect}(p_0, p_1)$, $F_2 = \text{Vect}(p_2)$ et $F_3 = \text{Vect}(p_3)$.

   (a) Déterminer en le justifiant les dimensions de F_1, F_2 et F_3. Comparer avec la dimension de E.

   (b) Montrer que $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_3 \cap F_1 = \{\vec{0}\}$.

   (c) Exprimer $p_0 - p_1$ en fonction de p_2 et p_3.

   (d) Que peut-on dire de la famille (p_0, p_1, p_2, p_3) ? En déduire que $E \neq F_1 + F_2 + F_3$.

4. Montrer l'équivalence

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i \ \text{ et} \\ \forall i \in \{1, \ldots, p\}, F_i \cap \left(\displaystyle\sum_{j=1, j \neq i}^{p} F_j \right) = \{\vec{0}\}, \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \vec{x} \in E, \ \exists! (\vec{f_i})_{i \in \{1, \ldots, p\}} \in F_1 \times \cdots \times F_p, \\ \text{t.q. } \ \vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \vec{f_i}. \end{array} \right. \tag{1}$$

5. On suppose que le membre de gauche de l'équivalence (1) est vérifiée. Dans ce cas, on note $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, soit $n_i \geq 1$ la dimension de F_i et $\mathcal{B}_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\vec{g}_1^{\,i}, \ldots, \vec{g}_{n_i}^{\,i}\}$ une base de F_i. Montrer que $\mathcal{B} \stackrel{\text{déf.}}{=} \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ est une base de E.

6. En déduire une relation entre la dimension de E et celles des F_i.

Exercice 3 : *(barème approximatif : 3 points)*

Il est indispensable de prouver les réponses.

1. Soit A, B, C, D quatre vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^3$. On notera $(a_i)_{i=1,2,3}$ les composantes de A (et de la même façon pour B, C et D). On suppose que l'on sait que

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

   Montrer que $\det \big(A + B \mid C \mid D\big) = \det \big(A \mid C \mid D\big) + \det \big(B \mid C \mid D\big)$, en développant le déterminant suivant la première ligne.

2. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   On donne $\det M = 10$ (on ne demande pas de calculer ce déterminant).

   (a) Donner sans calcul mais **avec des justifications** la valeur de $\det N$, où

$$N = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (b) Donner sans calcul mais **avec des justifications** la valeur de $\det P$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$