MT23-P2025 - Test
Durée : 45 min.
Aucun outil numérique – pas de documents

La justification des réponses est primordiale. Prouvez ce que vous énoncez.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 9 points)*

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit $n \geq 1$ un entier et soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner la définition de valeur propre et de polynôme caractéristique de A.

   Réponse : voir cours. □

2. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si λ annule le polynôme caractéristique.

   Réponse : voir cours. □

3. Donner 3 conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité.

   Réponse : voir cours. □

4. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A.

   Réponse : on trouve : $\Pi_A(s) = \det(A - sI) = -(s-2)^2(s-1)$, donc 2 est valeur propre double et 1 est valeur propre simple.

   Comme $Ay = 2y$ est équivalent à $2x_1 = 3x_2 + 2x_3$, on trouve $V_2 = \ker(A - 2I) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ donc comme $\det(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \neq 0$, ces deux vecteurs générateurs de V_2 constituent une famille libre, donc une base de V_2 et $\dim(V_2) = 2$.

   On trouve en résolvant le système par élimination de Gauss que $Ay = y$ est équivalent à $x_1 = x_2 = -x_3$, donc $V_1 = \ker(A - I) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, dont le vecteur générateur, non nul, est libre et donc une base de V_1. Donc $\dim(V_1) = 1$. □

   (b) Dire, en le justifiant, si A est diagonalisable.

   Réponse : comme $\dim(V_2) = 2 =$ multiplicité de la vp réelle 2 et que $\dim(V_1) = 1 =$ multiplicité de la vp réelle 1, on obtient que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, c'est-à-dire que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. □

Exercice 2 : *(barème approximatif : 6 points)*
Prouvez ce que vous énoncez.

Soit n_1 et n_2 deux entiers ≥ 1, et soient A une matrice de $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})$, C une matrice de $\mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$ et B une troisième matrice. On introduit M la matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}.$$

1. Donner le nombre de lignes et de colonnes de B.

   Réponse : B est dans $\mathcal{M}_{n_2,n_1}$. $\square$

2. Donner, sans le démontrer, $\det(M)$ en fonction des autres déterminants.

   Réponse : comme les blocs diagonaux sont carrés et que la matrice est triangulaire inférieure par blocs, on a d'après le cours $\det(M) = \det(A)\det(C)$. $\square$

3. On suppose dorénavant que M est inversible.
   Donner la formule de l'inverse de A par la formule de Cramer.

   Réponse : on remarque que M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$, ssi $\det(A)$ et $\det(C) \neq 0$, ssi A et C sont inversibles.

   Donc, d'après l'hypothèse, A et C sont inversibles.

   Revoir le cours : Cramer pour A : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\mathrm{co}(A))^T$, où la comatrice $\mathrm{co}(A)$ est définie par $(\mathrm{co}(A))_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{|i,j|})$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n_1$. $\square$

4. Déterminer l'inverse de M.
   On pourra travailler par identification en cherchant $N = M^{-1}$ sous la forme d'une matrice triangulaire par blocs.

   Réponse : on cherche N sous la forme $N = \begin{pmatrix} D & 0 \\ E & F \end{pmatrix}$, et on travaille par identification en notant que N est l'inverse de M ssi $MN = I_{n_1+n_2}$. On trouve

$$\begin{aligned}
MN = I_{n_1+n_2} \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} AD & 0 \\ BD + CE & CF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} D = A^{-1} \\ F = C^{-1} \\ E = -C^{-1}BA^{-1} \end{cases} \\
&\iff \quad M^{-1} = N = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   $\square$

5. On prend $n_1 = n_2 = 2$.

   (a) Donner l'inverse de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par Cramer.

   (b) En déduire l'inverse de

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d \\ 0 & 0 & a & c \end{pmatrix}.$$

Réponse : M est écrite par blocs, avec le bloc B nul. On suppose toujours que M est inversible, donc A et C le sont : donc $\det(A) = -\det(C) = ad - bc \neq 0$. Par Cramer, on trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^{-1} = \frac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix} c & -d \\ -a & b \end{pmatrix},$$

et donc

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b & 0 & 0 \\ -c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & d \\ 0 & 0 & a & -b \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 3 : *(barème approximatif : 5 points)*
Prouvez ce que vous énoncez.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le noyau de A par la méthode de Gauss.
   On indiquera les opérations effectuées.

   Réponse : en faisant $\underline{A}_2^{(2)} = \underline{A}_2^{(1)} + 2\underline{A}_1^{(1)}$ et $\underline{A}_3^{(2)} = \underline{A}_3^{(1)} - 6\underline{A}_1^{(1)}$, on trouve

$$\begin{aligned} Ax^\star = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1^\star + 3x_2^\star - x_3^\star + 2x_4^\star &= 0 \\ 7x_2^\star + 7x_4^\star &= 0 \\ -14x_2^\star - 14x_4^\star &= 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1^\star = x_3^\star + x_4^\star \\ x_2^\star = -x_4^\star \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad x^\star \in \ker(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

   dont on remarque que les 2 vecteurs sont libres car $\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 \neq 0$, Donc $\dim(\ker(A)) = 2$ et d'après le théorème du rang, $\mathrm{rang}(A) = 4 - \dim(\ker(A)) = 2$. On conclut au passage que A n'est ni injective ni surjective.

   □

2. Donner l'ensemble des solutions de $Ax = b$ avec $b = [1, 5, -8]^T$.
   On pourra prendre $x_2 = 0$ pour la solution particulière.

   Réponse : en faisant les mêmes opérations sur b que sur les lignes de A ($b_2^{(2)} = b_2^{(1)} + 2b_1^{(1)}$ et $b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - 6b_1^{(1)}$), on trouve

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 7x_2 + 7x_4 &= 7 \\ -14x_2 - 14x_4 &= -14 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 &= -2 + x_3 + x_4 \\ x_2 &= 1 - x_4 \end{cases}$$
$$\iff x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On note que les solutions de $Ax = b$ sont de la forme $x = x_p + x^\star$, où x_p est une solution particulière de $Ax = b$ et $x^\star$ un vecteur du noyau. Il y a donc une infinité de solutions.

Remarque : il est possible de prendre d'autres solutions particulières, comme $x_{p_2} = [-2, 1, 0, 0]^T$, ou $x_{p_3} = [0, 0, 1, 1]^T$, ou $x_{p_4} = [0, -1, 0, 2]^T$, ou...

$\square$

3. Même question pour $c = [2, 3, -1]^T$.

Réponse : en faisant les mêmes opérations sur c, on trouve

$$Ax = c \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 7x_2 + 7x_4 &= 7 \\ -14x_2 - 14x_4 &= -13 \end{cases}$$

qui n'admet pas de solution. $\square$

4. Préciser, en le justifiant, si b ou c sont dans l'image de A.

Réponse : on a vu que $\text{rang}(A) = 2 < 3$ donc $\text{Im}(A) \subsetneq \mathbb{R}^3$: il existe des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas dans l'image de A.

Or, comme il existe x tq $Ax = b$, cela signifie que $b \in \text{Im}(A)$. En revanche, comme $Ax = c$ n'admet pas de solution, $c \notin \text{Im}(A)$. $\square$