MT23-P2025 - Test

Durée : 45 min.

Aucun outil numérique – pas de documents

La justification des réponses est primordiale. Prouvez ce que vous énoncez.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 9 points)*

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit $n \geq 1$ un entier et soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner la définition de valeur propre et de polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si λ annule le polynôme caractéristique.
3. Donner 3 conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité.
4. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A.
   (b) Dire, en le justifiant, si A est diagonalisable.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 6 points)*

Prouvez ce que vous énoncez.

Soit n_1 et n_2 deux entiers ≥ 1, et soient A une matrice de $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})$, C une matrice de $\mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$ et B une troisième matrice. On introduit M la matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}.$$

1. Donner le nombre de lignes et de colonnes de B.
2. Donner, sans le démontrer, $\det(M)$ en fonction des autres déterminants.
3. On suppose dorénavant que M est inversible.
   Donner la formule de l'inverse de A par la formule de Cramer.
4. Déterminer l'inverse de M.
   On pourra travailler par identification en cherchant $N = M^{-1}$ sous la forme d'une matrice triangulaire par blocs.
5. On prend $n_1 = n_2 = 2$.
   (a) Donner l'inverse de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par Cramer.
   (b) En déduire l'inverse de
$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d \\ 0 & 0 & a & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : *(barème approximatif : 5 points)*
Prouvez ce que vous énoncez.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le noyau de A par la méthode de Gauss.
   On indiquera les opérations effectuées.

2. Donner l'ensemble des solutions de $Ax = b$ avec $b = [1, 5, -8]^T$.
   On pourra prendre $x_2 = 0$ pour la solution particulière.

3. Même question pour $c = [2, 3, -1]^T$.

4. Préciser, en le justifiant, si b ou c sont dans l'image de A.