MT23 - A2022 - Examen final

Durée 2h – Les documents et machines à calculer sont interdits.

Rédigez chaque exercice sur une copie **séparée.**
Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème approximatif : 7 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
   On justifiera cette relation entre A, P et D.

2. Soit la forme quadratique $q(x) = x^\top A\, x$. Utiliser la question précédente pour obtenir une décomposition de q en carrés (on pourra poser $y = P^{-1}x$).

3. Montrer que A est définie-positive en utilisant la définition.

4. On souhaite résoudre le système suivant

$$x'(t) = Ax(t) + f(t) \quad (I)$$

   où A est la matrice précédente et $f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{3t} \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $(I) \Leftrightarrow z'(t) = Dz(t) + g(t) \quad (II)$.
   (b) Résoudre (II).
   (c) En déduire $x(t)$.

Exercice 2 (*barème approximatif : 6,5 points*) **CHANGER DE COPIE**

1. On définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) On admet que A admet une valeur propre triple λ : que vaut λ ?
   A est-elle diagonalisable ? (Ne pas calculer la dimension du sous-espace propre).
   (b) Sans calcul, en déduire la valeur de $(A - I)^3$.
   (c) Déterminer une base du sous-espace propre V_λ.

2. Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix},$$

   où α, β, γ sont trois paramètres tels que P soit inversible.

On cherche une matrice triangulaire supérieure

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & a & b \\ 0 & t_{22} & c \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$$

telle que

$$AP = PT$$

(a) Déterminer t_{11}, t_{22}, t_{33} et a (il y a très peu de calculs).

(b) On note P_i la ième colonne de la matrice P. On cherche α, β et γ tels que $b = 0$ et $c = 1$.

i. Exprimer AP_3 en fonction de P_2 et P_3 en supposant $b = 0$ et $c = 1$.

ii. En déduire que $P_3 \in \text{Ker } (A - I)^2$.

iii. Sans calculer P_3 ni utiliser le fait que P soit inversible, montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

iv. Calculer des valeurs possibles pour α, β et γ.

Exercice 3 (*barème approximatif : 6,5 points + bonus : 1,5*) **CHANGER DE COPIE**

0. *Question préliminaire* : On suppose que $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive. Soit l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\langle x, y \rangle_A = x^\top A\, y, \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est une produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

On pose $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est une matrice définie positive (on pourra utiliser la méthode de réduction de Gauss).

2. Expliciter le produit scalaire $\langle x, y \rangle_A$ en fonction des composantes des vecteurs x et y.

3. On note $|| \cdot ||_A$ la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. On considère les vecteurs $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $||x||_A$, $||y||_A$ et $\langle x, y \rangle_A$. Donner alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz vérifiée par x et y.

4. Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, muni d'une base (g_1, g_2). Montrer que :

$$y \in G^\perp \Leftrightarrow < y, g_i >= 0,\ i = 1, 2.$$

5. Soit le sous-espace vectoriel $F = \{x \in \mathbb{R}^3\ :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Déterminer une base de F et sa dimension.

6. Soit $F^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3\ :\ \forall y \in F,\ \langle x, y \rangle_A = 0\}$. Déterminer la dimension de $F^\perp$ et une base.

7. *Question bonus* : En utilisant les bases de F et $F^\perp$, déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.