MT23 - A2024 - Examen final

Les documents et machines à calculer sont interdits.
La rédaction est très importante : justifier clairement vos réponses !

Exercice 1 (barème provisoire : 11 points) UNE COPIE PAR PARTIE ! !

- Partie I - CHANGER DE COPIE

On définit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$ où a_0, a_1, a_2 sont trois paramètres réels.

1. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A (on ne demande pas de trouver les racines).
   (b) Soit λ une valeur propre de A.
      i. Quel est le rang de la matrice $(A - \lambda I)$?
      ii. Déterminer, en fonction de λ, les coordonnées du vecteur propre associé de première coordonnée égale à 1.
2. On suppose que la matrice A admet une valeur propre simple λ_1 et une valeur propre double λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).
   (a) Montrer que A n'est pas diagonalisable (justifier la réponse).
   (b) Soit $Y_1 \in V_{\lambda_1}$ et $Y_2 \in V_{\lambda_2}$.
   On suppose qu'il existe Y_3 tel que $(A - \lambda_2 I)Y_3 = Y_2$.
      i. Exprimer $(A - \lambda_2 I)Y_1$ et $(A - \lambda_2 I)Y_2$ en fonction de Y_1.
      ii. Utiliser la question précédente pour montrer que (Y_1, Y_2, Y_3) est une famille libre.
      iii. Soit $P = (Y_1\ Y_2\ Y_3)$, on cherche une matrice triangulaire supérieure définie par $T = \begin{pmatrix} t_{11} & a & b \\ 0 & t_{22} & c \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$ telle que $AP = PT$.
      Déterminer t_{11}, t_{22}, t_{33} et a, b, c (il y a très peu de calculs).
3. Application : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) On rappelle que la racine double x_0 d'un polynôme p vérifie :
   $p(x_0) = p'(x_0) = 0$ et $p''(x_0) \neq 0$.
   Vérifier que $\lambda_2 = 1$ est valeur propre double de A et en déduire λ_1.
   (b) Calculer Y_3 tel que sa première coordonnée soit nulle et en déduire P.

- Partie II - CHANGER DE COPIE

1. Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :
$$y^{(3)}(t) - 4y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = 0 \quad (*)$$
Montrer que l'on peut réécrire cette équation sous la forme d'un système différentiel du premier ordre
$$x'(t) = Ax(t) \quad (S_1)$$
en précisant bien quelles sont les nouvelles fonctions inconnues.
2. Montrer que $(S_1) \Leftrightarrow (S_2)$ où (S_2) est le système différentiel $\left\{\begin{array}{rclcrcr} z_1'(t) & = & 2z_1(t) & & & & \\ z_2'(t) & = & & & z_2(t) & + & z_3(t) \\ z_3'(t) & = & & & & & z_3(t) \end{array}\right.$
3. Résoudre le système (S_2)
4. En déduire la solution de $(*)$.

Exercice 2 (barème provisoire : 4,5 points) CHANGER DE COPIE

On pose $B = AA^T$ où $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que la matrice B est symétrique semi-définie positive (on pourra poser $y = A^T x$).
   (b) Déterminer une condition sur A pour que B soit définie positive.
2. On définit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$
où α est réel quelconque.
   (a) A quelle condition nécessaire et suffisante sur α la forme bilinéaire $f(x,y) = x^T By$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{3,1}$?
   (b) On pose $\alpha = 1$ et on munit $\mathcal{M}_{3,1}$ du produit scalaire $f(x,y) = x^T By$.
   Soit e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}$ et $F = \text{vect} \;< e_1 >$.
   Quelle est la dimension de $F^\perp$?
   Déterminer une base de $F^\perp$.

Exercice 3 (barème provisoire : 6 points) CHANGER DE COPIE

Rappel : Si $F = F_1 \oplus F_2$, la projection sur F_1 parallèlement à F_2 est définie par $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \mapsto \vec{x}_1$.

Soit $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
On appellera $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ la base canonique de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
Pour tout $p(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ et $q(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, on définit
$$h(p,q) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

1. Montrer que h est un produit scalaire sur $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
2. Donner la norme associée. On munit $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de **cette** norme et **ce** produit scalaire.
3. On définit $q_1(x) = 1 + x + x^2$, $q_2(x) = 1 - x$ et $q_3(x) = 1 + x - 2x^2$.
   On pose $F = \text{vect} \;< q_1, q_2 >$ et $G = \text{vect} \;< q_3 >$.
   (a) Montrer que $F^\perp = G$.
   (b) On appelle u la projection sur F parallèlement à G (projection orthogonale).
      i. Que valent $u(q_1)$, $u(q_2)$ et $u(q_3)$?
      ii. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de u.
      iii. Construire alors une base orthonormée de vecteurs propres, notée $\mathcal{B}'$.
      iv. Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
      Que peut-on dire de cette matrice ?
      v. Soit U et U' les matrices associées à u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement.
      Donner U' et la relation qui lie U à U'.