

NOM :

PRENOM :

Numéro, jour et horaire du TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (2,5 ; 4 ; 3,5). Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Donner la définition de $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. Donner la définition de $\text{Im } f$.
3. Montrer que $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel (on précisera de quel espace vectoriel).

Exercice 2 Soit u l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

et soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
2. Déterminer $\text{Ker } u$.
3. Montrer que $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2))$ est une base de $\text{Im } (u)$
4. u est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 3 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de E .

1. Donner une condition sur u pour que

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre de $E \Rightarrow (u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une famille libre de F

Démontrer alors cette propriété.

2. La réciproque est-elle vraie ? Si oui la démontrer, sinon donner un contre-exemple.