MT23 - A2025 - Test 1 - Correction

Exercice 1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Donner la définition de $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. Donner la définition de $\operatorname{Im} f$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel (on précisera de quel espace vectoriel).

Correction.

1. f est linéaire de E dans F si
   — pour tout $\vec{x}$ et $\vec{y} \in E$ alors $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$,
   — pour tout $\vec{x} \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$.
2. $\operatorname{Im} f = \{\vec{y} \in F \,/\, \exists\, \vec{x} \in E,\, \vec{y} = f(\vec{x})\}$.
3. Montrons que $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de F. Il y a trois propriétés à vérifier :
   — $\operatorname{Im} f \neq \emptyset$: en effet, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ car f est linéaire donc $\vec{0}_F \in \operatorname{Im} f$.
   — Soient $\vec{y}_1$ et $\vec{y}_2 \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2 \in E$ vérifiant $\vec{y}_1 = f(\vec{x}_1)$ et $\vec{y}_2 = f(\vec{x}_2)$.
   Il reste à remarquer que $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \in \operatorname{Im} f$: $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$ car f est linéaire.
   — Soit $\vec{y} \in \operatorname{Im} f$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que $\alpha \vec{y} \in \operatorname{Im} f$.
   Comme $\vec{y} \in \operatorname{Im} f$ alors il existe $x \in E$ vérifiant $\vec{y} = f(\vec{x})$.
   On en déduit alors que $\alpha\, \vec{y} = \alpha\, f(\vec{x}) = f(\alpha \vec{x})$ donc $\alpha\, \vec{y} \in \operatorname{Im} f$.

   On en déduit que $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de F.

Exercice 2 Soit u l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u(x_1,x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2) \qquad \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

et soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} u$.
3. Montrer que $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2))$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$
4. u est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Correction.

1. Soient $\vec{x} = (x_1,x_2)$ et $\vec{y} = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{aligned} u(\vec{x}+\vec{y}) = u(x_1+y_1, x_2+y_2) &= (2(x_1+y_1) + (x_2+y_2), (x_1+y_1) - (x_2+y_2)) \\ &= (2x_1 + x_2 + 2y_1 + y_2, x_1 - x_2 + y_1 - y_2) \\ &= (2x_1 + x_2, x_1 - x_2) + (2y_1 + y_2, y_1 - y_2) \\ &= u(x) + u(y). \end{aligned}$$

   De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$u(\alpha\vec{x}) = u(\alpha x_1, \alpha x_2) = (2(\alpha x_1) + (\alpha x_2), (\alpha x_1) - (\alpha x_2)) = \alpha(2x_1 + x_2, x_1 - x_2) = \alpha u(\vec{x}).$$

   Ainsi $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

2. On a la suite d'équivalences suivantes :

$$\vec{x} = (x_1,x_2) \in \operatorname{Ker} u \quad \Leftrightarrow \quad u(\vec{x}) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 0, \\ x_1 - x_2 &= 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 &= 0, \\ x_1 &= x_2. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}$$

   On en déduit ainsi que $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\}$.

3. D'après le cours $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$. De plus, toujours d'après le cours, l'image par une application injective d'une famille libre est libre. Ainsi, comme $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre et que u est injective d'après la question précédente (car $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\}$) alors $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2))$ est également libre. Cette famille est donc une base de $\operatorname{Im} u$.
   On pouvait aussi démontrer que la famille est libre.

4. D'après la question 3 l'application est injective. Par ailleurs $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2))$ est une base de $\operatorname{Im} u$ ainsi $\dim(\operatorname{Im} u) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, i.e., $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$. En conclusion u est surjective, elle est donc bijective car injective et bijective.
   On pouvait aussi utiliser la propriété suivante : l'image par u d'une base est une base $\Leftrightarrow$ u bijective.

Exercice 3 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de E.

1. Donner une condition sur u pour que

   $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre de $E \Rightarrow (u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une famille libre de F

   Démontrer alors cette propriété.
2. La réciproque est-elle vraie ? Si oui la démontrer, sinon donner un contre-exemple.

Correction.

1. D'après le cours u doit être injective.
   Supposons alors u injective et montrons que la famille $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \dots, u(\vec{e}_n))$ est libre.
   Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ vérifiant

   $$\alpha_1 u(\vec{e}_1) + \alpha_2 u(\vec{e}_2) + \dots + \alpha_n u(\vec{e}_n) = \vec{0}_F.$$

   Comme u est une application linéaire, on en déduit que

   $$u(\alpha_1 \, \vec{e}_1 + \alpha_2 \, \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \, \vec{e}_n) = \vec{0}_F.$$

   Ainsi $\alpha_1 \, \vec{e}_1 + \alpha_2 \, \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \, \vec{e}_n \in \operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$ car on suppose u injective. D'où

   $$\alpha_1 \, \vec{e}_1 + \alpha_2 \, \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \, \vec{e}_n = \vec{0}_E.$$

   Or la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ étant libre, on en conclut que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ et donc que la famille $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \dots, u(\vec{e}_n))$ est libre.
2. La réciproque est juste. En effet, supposons que $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une famille libre de F et considérons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ vérifiant

   $$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}_E.$$

   On applique à cette relation l'application u

   $$u(\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n) = u(\vec{0}_E).$$

   et on utilise son caractère linéaire pour en déduire que

   $$\alpha_1 u(\vec{e}_1) + \alpha_2 u(\vec{e}_2) + \dots + \alpha_n u(\vec{e}_n) = \vec{0}_F.$$

   Or, par hypothèse, la famille $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \dots, u(\vec{e}_n))$ est libre, donc

   $$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

   On en déduit que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est également libre.