MT23 - A2025 - Examen médian

Durée 1h30 – Les documents et machines à calculer sont interdits.

Rédigez chaque exercice sur une copie **séparée.**
Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème approximatif : 8 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et on note $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E.
Soit u l'endomorphisme de E défini, pour tout $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in E$, par

$$u(\vec{x}) = (-x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (x_1 + x_3)\vec{e}_2 + (x_2 + x_3)\vec{e}_3.$$

1. Déterminer $u(\vec{e}_1)$, $u(\vec{e}_2)$ et $u(\vec{e}_3)$.
2. Ecrire la matrice A représentant u dans la base $\mathcal{E}$ (expliquer votre démarche).
3. A est-elle inversible ? Que pouvez-vous en déduire sur rang A ?
4. Déterminer une base de Ker A et calculer rang A.
5. On définit la famille $\mathcal{E}' = (\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$ par

$$\vec{e_1}' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e_2}' = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{e_3}' = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2.$$

   (a) En utilisant les déterminants, montrer que $\mathcal{E}'$ est une base de E.
   (b) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ et calculer P^{-1}.
   (c) En utilisant la formule de changement de base, déterminer la matrice A' représentant u dans la base $\mathcal{E}'$ de E.
   (d) Vérifier le résultat en écrivant directement la matrice A' représentant u dans la base $\mathcal{E}'$

Exercice 2 (*barème approximatif : 4 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit $v \in \mathcal{L}(E, E)$ où E est un espace vectoriel de dimension n. On rappelle que $v^2 = v \circ v$.

1. Quelle inclusion a-t-on entre Ker v et Ker v^2 ? La démontrer.
2. Quelle inclusion a-t-on entre Im v et Im v^2 ? La démontrer.
3. On suppose que

$$\text{Im } v = \text{Im } v^2.$$

   (a) En déduire que Ker v = Ker v^2.
   (b) Montrer que Ker $v \cap$ Im $v = \{\vec{0}_E\}$.
   (c) En déduire que Ker $v \oplus$ Im $v = E$.

TSVP

Exercice 3 (*barème approximatif : 4,5 points*) **CHANGER DE COPIE**

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème dit des quatre dimensions :

Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et F et G deux s.e.v. de E, alors

$$dim\ (F+G) = dim\ (F) + dim\ (G) - dim\ (F \cap G), \tag{1}$$

Pour rappel $F + G = \{\vec{z} \in E / \exists\ \vec{x} \in F, \exists\ \vec{y} \in G,\ \vec{z} = \vec{x} + \vec{y}\}$.
On considère dans la suite que dim $(F \cap G) = p$, dim $(F) = q$, dim $(G) = r$ (avec $p < q$ et $p < r$) et on note $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une base de $F \cap G$

1. Justifier que $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$.
2. Justifier l'existence de vecteurs $\vec{v}_{p+1}$, ...,$\vec{v}_q$ et $\vec{w}_{p+1}$,...,$\vec{w}_r$ tels que $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_q)$ soit une base de F et $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{w}_{p+1}, \ldots, \vec{w}_r)$ soit une base de G.
3. Montrer $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_q, \vec{w}_{p+1}, \ldots, \vec{w}_r)$ est une famille génératrice de $F + G$.
4. Montrons que $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_q, \vec{w}_{p+1}, \ldots, \vec{w}_r)$ est une famille libre de $F + G$:
   Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_q, \gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_r \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\alpha_1 \vec{u}_1 + \ldots + \alpha_p \vec{u}_p + \beta_{p+1} \vec{v}_{p+1} + \ldots + \beta_q\, \vec{v}_q + \gamma_{p+1} \vec{w}_{p+1} + \ldots + \gamma_r \vec{w}_r = 0_E. \tag{2}$$
   (a) Montrer que $\gamma_{p+1} \vec{w}_{p+1} + \ldots + \gamma_r \vec{w}_r \in F \cap G$.
   (b) En déduire que $\gamma_{p+1} = \ldots = \gamma_r = 0$.
   (c) En déduire que $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_q, \vec{w}_{p+1}, \ldots, \vec{w}_r)$ est une famille libre.
5. En déduire que l'égalité (1) est vérifiée.

Exercice 4 (*barème approximatif : 5 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ; on note $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ sa base canonique (on rappelle que $p_i(t) = t^i$, pour tout $t \in \mathbb{R}$).
On définit l'application f pour tout $p \in \mathcal{P}_2$ par

$$f(p) = p' + p(0)p_0 - p$$

où p' désigne la dérivée de p.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que Im $f \subset \mathcal{P}_2$.
3. Déterminer une base de Ker f.
4. Déterminer une base de Im f.
5. Déterminer la matrice B de f quand on munit $\mathcal{P}_2$ de la base canonique.
6. Sans calcul, que peut-on dire de det B ?