MT23 - A2025 - Examen médian - Correction

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et on note $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E.
Soit u l'endomorphisme de E défini, pour tout $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in E$, par

$$u(\vec{x}) = (-x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (x_1 + x_3)\vec{e}_2 + (x_2 + x_3)\vec{e}_3.$$

1. Déterminer $u(\vec{e}_1)$, $u(\vec{e}_2)$ et $u(\vec{e}_3)$.
   Correction : Un calcul direct montre que

$$u(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad u(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad u(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2. Ecrire la matrice A représentant u dans la base $\mathcal{E}$ (expliquer votre démarche).
   Correction : D'après le calcul précédent, on obtient

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(\vec{e}_1) & u(\vec{e}_2) & u(\vec{e}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array}$$

3. A est-elle inversible ? Que pouvez-vous en déduire sur rang A ?
   Correction : Comme $\det(A) = 1 - 1 = 0$ alors A n'est pas inversible.
   La famille des colonnes de A ne forme donc pas une base de Im (A)) et rang $(A) < 3$.
4. Déterminer une base de Ker A et calculer rang A.
   Correction : On a les équivalences suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \quad \Leftrightarrow \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} -x_1 + x_2 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0, \\ x_2 + x_3 & = 0, \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_2 & = x_1, \\ x_3 & = -x_1. \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que

$$\text{Ker } A = \text{Vect} \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in \text{Ker } A} \right\rangle.$$

   De plus, comme cette matrice colonne est non nulle, elle forme une base de Ker (A). En conclusion

$$\dim (\text{Ker } A) = 1$$

   et, d'après le théorème du rang, on en déduit que

$$\text{rang } (A) = 3 - 1 = 2.$$

5. On définit la famille $\mathcal{E}' = (\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$ par

$$\vec{e_1}' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e_2}' = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{e_3}' = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2.$$

(a) En utilisant les déterminants, montrer que $\mathcal{E}'$ est une base de E.
Correction : On considère la matrice Q suivante

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \vec{e_1}' & \vec{e_2}' & \vec{e_3}' \end{array} \\ Q = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2. \\ \vec{e}_3 \end{array} \end{array}$$

Le calcul du déterminant donne

$$\det(Q) = -1 \neq 0.$$

Ainsi $\det(Q) \neq 0$ et donc, d'après le cours, on en déduit que la famille $\mathcal{E}'$ est une base de E.

(b) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ et calculer P^{-1}.
Correction : Il est évident que $P = Q$ (matrice de la question précédente). Calculons à présent P^{-1} qui n'est autre que la matrice de passage de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 & = \vec{e_1}' \\ \vec{e}_1 \quad\quad + \vec{e}_3 & = \vec{e_2}' \\ \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 & = \vec{e_3}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 & = \vec{e_1}' \\ \quad\quad \vec{e}_2 & = \vec{e_2}' - \vec{e_1}' \\ \quad\quad -\vec{e}_2 - \vec{e}_3 & = \vec{e_3}' - \vec{e_1}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 & = -2\vec{e_1}' + 2\vec{e_2}' + \vec{e_3}', \\ \vec{e}_2 & = -\vec{e_1}' + \vec{e_2}', \\ \vec{e}_3 & = 2\vec{e_1}' - \vec{e_2}' - \vec{e_3}'. \end{cases}$$

d'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) En utilisant la formule de changement de base, déterminer la matrice A' représentant u dans la base $\mathcal{E}'$ de E.
Correction : D'après le cours, on a la formule suivante :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Vérifier le résultat en écrivant directement la matrice A' représentant u dans la base $\mathcal{E}'$
Correction : On sait que l'on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 & = -2\vec{e_1}' + 2\vec{e_2}' + \vec{e_3}' \\ \vec{e}_2 & = -\vec{e_1}' + \vec{e_2}' \\ \vec{e}_3 & = 2\vec{e_1}' - \vec{e_2}' - \vec{e_3}' \end{cases}$$

Par linéarité de u, on obtient alors

$$\begin{aligned} u(\vec{e_1}') &= u(\vec{e}_1) - u(\vec{e}_2) + u(\vec{e}_3) = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = 2\vec{e_1}' - 2\vec{e_2}' - 2\vec{e_3}' \\ u(\vec{e_2}') &= u(\vec{e}_1) + u(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 2\vec{e_1}' - \vec{e_2}' - 2\vec{e_3}' \\ u(\vec{e_3}') &= u(\vec{e}_1) - 2u(\vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = \vec{e_1}' - 3\vec{e_2}' - \vec{e_3}' \end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u(\vec{e_1}') & u(\vec{e_2}') & u(\vec{e_3}') \end{array} \\ A' = & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{e_1}' \\ \vec{e_2}' \\ \vec{e_3}' \end{array} \end{array}$$

Exercice 2

Soit $v \in \mathcal{L}(E, E)$ où E est un espace vectoriel de dimension n. On rappelle que $v^2 = v \circ v$.

1. Quelle inclusion a-t-on entre Ker v et Ker v^2 ? La démontrer.
   Correction : On a l'inclusion Ker $v \subset$ Ker v^2.
   En effet, soit $\vec{x} \in$ Ker v, alors $v(\vec{x}) = \vec{0}_E$. En appliquant v à cette dernière égalité, et comme v est linéaire, on obtient $v^2(\vec{x}) = (v \circ v)(\vec{x}) = v(v(\vec{x})) = v(\vec{0}_E) = \vec{0}_E$. Ainsi $\vec{x} \in$ Ker v^2.
2. Quelle inclusion a-t-on entre Im v et Im v^2 ? La démontrer.
   Correction : On a l'inclusion Im $v^2 \subset$ Im v.
   En effet, soit $\vec{y} \in$ Im v^2, alors il existe $\vec{x} \in E$ tel que $v^2(\vec{x}) = \vec{y}$. En notant $\vec{z}$ le vecteur $v(\vec{x})$ on obtient que $v(\vec{z}) = v(v(\vec{x})) = v^2(\vec{x}) = \vec{y}$. En conclusion, $\vec{y} \in$ Im v.
3. On suppose que
   $$\text{Im } v = \text{Im } v^2.$$
   (a) En déduire que Ker v = Ker v^2.
   Correction : D'après ce qui précède, nous savons que Ker $v \subset$ Ker v^2. Par ailleurs, en appliquant le théorème du rang à v et v^2, on a
   $$\dim\,(\text{Ker } v) + \text{rang } v = \dim\,(E),$$
   et
   $$\dim\,(\text{Ker } v^2) + \text{rang } v^2 = \dim\,(E).$$
   En soustrayant ces deux égalités et en utilisant l'hypothèse Im v = Im v^2, on en déduit que
   $$\dim\,(\text{Ker } v) = \dim\,(\text{Ker } v^2),$$
   et donc que Ker v = Ker v^2.

   (b) Montrer que Ker $v \cap$ Im $v = \{\vec{0}_E\}$.
   Correction : Raisonnons par double inclusion.
   Comme $\{\vec{0}_E\} \subset$ Ker v et $\{\vec{0}_E\} \subset$ Im v alors $\{\vec{0}_E\} \subset$ Ker $v \cap$ Im v.
   Par ailleurs, soit $\vec{y} \in$ Ker $v \cap$ Im v, alors $v(\vec{y}) = \vec{0}_E$ et il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = v(\vec{x})$. En appliquant v à cette dernière égalité on obtient
   $$v^2(\vec{x}) = v(\vec{y}) = \vec{0}_E.$$
   Ainsi $\vec{x} \in$ Ker v^2 = Ker v et donc $\vec{y} = v(\vec{x}) = \vec{0}_E$, *i.e.*, $\vec{y} = \vec{0}_E$ et Ker $v \cap$ Im $v \subset \{0_E\}$

   (c) En déduire que Ker $v \oplus$ Im $v = E$.
   Correction : C'est une conséquence directe de la question précédente. En effet, d'après le théorème du rang, on sait que
   $$\dim\,(\text{Ker } v) + \dim\,(\text{Im } v) = \dim E.$$
   Ajouté à la propriété démontrée dans la question précédente, on a le résultat demandé.
   On pouvait aussi utiliser le fait que, pour tout $\vec{x} \in E$, on a la décomposition suivante
   $$\vec{x} = \underbrace{\vec{x} - v(\vec{x})}_{\in \text{ Ker } v} + \underbrace{v(\vec{x})}_{\in \text{ Im } v},$$
   ce qui implique que E = Ker v + Im v, puis utiliser une des deux propriétés précédentes.

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème dit des quatre dimensions :

Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et F et G deux s.e.v. de E, alors

$$dim\ (F+G) = dim\ (F) + dim\ (G) - dim\ (F\cap G), \tag{1}$$

Pour rappel $F+G = \{\vec{z}\in E/\exists\,\vec{x}\in F, \exists\,\vec{y}\in G,\ \vec{z}=\vec{x}+\vec{y}\}$.
On considère dans la suite que dim $(F\cap G)=p$, dim $(F)=q$, dim $(G)=r$ (avec $p<q$ et $p<r$)
et on note $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p)$ une base de $F\cap G$

1. Justifier que $F\cap G\subset F$ et $F\cap G\subset G$.
   Correction : Si $\vec{x}\in F\cap G$ alors *a fortiori* $\vec{x}\in F$ et donc $F\cap G\subset F$. On utilise le même raisonnement pour l'autre inclusion.
2. Justifier l'existence de vecteurs $\vec{v}_{p+1}$, ...,$\vec{v}_q$ et $\vec{w}_{p+1}$,...,$\vec{w}_r$ tels que $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{v}_{p+1},\ldots,\vec{v}_q)$ soit une base de F et $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{w}_{p+1},\ldots,\vec{w}_r)$ soit une base de G.
   Correction : la famille $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p)$ étant une base de $F\cap G$, on déduit de la question précédente que cette famille est libre dans F. Ainsi, d'après la théorème de la base incomplète, on en conclut l'existence des vecteurs $\vec{v}_{p+1}$, ...,$\vec{v}_q$ tels que la famille $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{v}_{p+1},\ldots,\vec{v}_q)$ soit une base de F. On raisonne de même pour l'existence des vecteurs $\vec{w}_{p+1}$,...,$\vec{w}_r$.
3. Montrer que $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{v}_{p+1},\ldots,\vec{v}_q,\vec{w}_{p+1},\ldots,\vec{w}_r)$ est une famille génératrice de $F+G$.
   Correction : Soient $\vec{x}\in F$ et $\vec{y}\in G$. D'après la question précédente, il existe des coefficients $\alpha_1,\ldots,\alpha_q\in\mathbb{R}$ et des coefficients $\beta_1,\ldots,\beta_r\in\mathbb{R}$ tels que

   $$\vec{x}=\alpha_1\,\vec{u}_1+\ldots+\alpha_q\,\vec{v}_q,$$

   et

   $$\vec{y}=\beta_1\,\vec{u}_1+\ldots+\beta_r\,\vec{w}_r.$$

   Ainsi, on obtient que $\vec{x}+\vec{y}$ vérifie :

   $$\vec{x}+\vec{y}=(\alpha_1+\beta_1)\,\vec{u}_1+\ldots+(\alpha_p+\beta_p)\,\vec{u}_p+\alpha_{p+1}\,\vec{v}_{p+1}+\ldots+\alpha_q\,\vec{v}_q+\beta_{p+1}\,\vec{w}_{p+1}+\ldots+\beta_r\,\vec{w}_r,$$

   et donc que la famille $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{v}_{p+1},\ldots,\vec{v}_q,\vec{w}_{p+1},\ldots,\vec{w}_r)$ est génératrice de $F+G$.
4. Montrons que $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{v}_{p+1},\ldots,\vec{v}_q,\vec{w}_{p+1},\ldots,\vec{w}_r)$ est une famille libre de $F+G$:
   Soit $\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta_{p+1},\ldots,\beta_q,\gamma_{p+1},\ldots,\gamma_r\in\mathbb{R}$ tels que

   $$\alpha_1\vec{u}_1+\ldots+\alpha_p\vec{u}_p+\beta_{p+1}\vec{v}_{p+1}+\ldots+\beta_q\,\vec{v}_q+\gamma_{p+1}\vec{w}_{p+1}+\ldots+\gamma_r\vec{w}_r=0_E. \tag{2}$$

   (a) Montrer que $\gamma_{p+1}\vec{w}_{p+1}+\ldots+\gamma_r\vec{w}_r\in F\cap G$.
   Il est clair que $\gamma_{p+1}\vec{w}_{p+1}+\ldots+\gamma_r\vec{w}_r\in G$ comme combinaison linéaire d'éléments de G. Par ailleurs, l'égalité (2) implique que

   $$\gamma_{p+1}\vec{w}_{p+1}+\ldots+\gamma_r\vec{w}_r=-\left(\alpha_1\vec{u}_1+\ldots+\alpha_p\vec{u}_p+\beta_{p+1}\vec{v}_{p+1}+\ldots+\beta_q\,\vec{v}_q\right)\in F.$$

   On en déduit la propriété souhaitée.

   (b) En déduire que $\gamma_{p+1}=\ldots=\gamma_r=0$.
   Correction : D'après la question précédente, comme $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p)$ est une base de $F\cap G$, alors il existe des coefficients $\lambda_1,\ldots,\lambda_p\in\mathbb{R}$ tels que

   $$\gamma_{p+1}\vec{w}_{p+1}+\ldots+\gamma_r\vec{w}_r=\lambda_1\vec{u}_1+\ldots+\lambda_p\vec{u}_p.$$

Ainsi, on en déduit que

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{u}_p - \gamma_{p+1}\vec{w}_{p+1} - \ldots - \gamma_r\vec{w}_r = \vec{0}_E.$$

Or la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{w}_{p+1}, \ldots, \vec{w}_r)$ est une famille libre de G, donc tous les coefficients de cette dernière combinaison linéaire sont nuls et *a fortiori* on a $\gamma_{p+1} = \ldots = \gamma_r = 0$.

(c) En déduire que $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_q, \vec{w}_{p+1}, \ldots, \vec{w}_r)$ est une famille libre.
Correction : La question précédente implique que l'égalité (2) se réduit à

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \ldots + \alpha_p\vec{u}_p + \beta_{p+1}\vec{v}_{p+1} + \ldots + \beta_q\,\vec{v}_q = 0_E.$$

Or la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_q)$ est une base de F, elle est donc libre et on en déduit que

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \beta_{p+1} = \ldots = \beta_q = 0.$$

Ainsi la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_q, \vec{w}_{p+1}, \ldots, \vec{w}_r)$ est libre.

5. En déduire que l'égalité (1) est vérifiée.
Correction : D'après les question précédentes, on a $\dim\,(F+G) = p + (q-p) + (r-p) = q + r - p$. Or

$$\dim\,(F) + \dim\,(G) - \dim\,(F \cap G) = q + r - p = \dim\,(F+G).$$

On obtient bien l'égalité souhaitée.

Exercice 4

Soit $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ; on note $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ sa base canonique (on rappelle que $p_i(t) = t^i$, pour tout $t \in \mathbb{R}$).
On définit l'application f pour tout $p \in \mathcal{P}_2$ par

$$f(p) = p' + p(0)p_0 - p$$

où p' désigne la dérivée de p.

1. Montrer que f est linéaire.
Correction : C'est une conséquence directe de la linéarité de la dérivée : $\forall p, q \in \mathcal{P}_2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(p+q) = (p+q)' + (p+q)(0)p_0 - (p+q) = p' + q' + p(0)p_0 + q(0)p_0 - p - q = f(p) + f(q)$$

$$f(\lambda p) = (\lambda p)' + (\lambda p)(0)p_0 - (\lambda p) = \lambda p' + \lambda p(0)p_0 - \lambda p = \lambda f(p)$$

2. Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathcal{P}_2$.
Correction : Soit $p \in \mathcal{P}_2$ alors il existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2.$$

On a alors que

$$\begin{aligned} f(p) = a_1p_0 + 2a_2p_1 + p(0)p_0 - a_0p_0 - a_1p_1 - a_2p_2 &= (a_1 + p(0) - a_0)p_0 + (2a_2 - a_1)p_1 - a_2p_2 \\ &= a_1p_0 + (2a_2 - a_1)p_1 - a_2p_2 \in \mathcal{P}_2, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $p(0) = a_0p_0(0) + a_1p_1(0) + a_2p_2(0) = a_0$.

3. Déterminer une base de Ker f.
   Correction : Soit $p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 \in$ Ker f, alors $f(p) = 0_{\mathcal{P}_2}$. D'après la question précédente, et en utilisant le fait que $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ est une famille libre, on en déduit que

$$\begin{cases} a_1 & = 0, \\ 2a_2 - a_1 & = 0, \\ a_2 & = 0. \end{cases}$$

   Ainsi $p \in$ Ker f si et seulement si $p = a_0p_0$. On en déduit que Ker f = vect $< p_0 >$ et comme p_0 n'est pas le polynôme nul, la famille $\{p_0\}$ forme une base de Ker f.
4. Déterminer une base de Im f.
   Correction : D'après le cours, on sait que la famille $\{f(p_0), f(p_1), f(p_2)\}$ est une famille génératrice de Im f. De plus, le théorème du rang et la question précédente impliquent que

$$\text{rang } f = 3 - 1 = 2.$$

   Il suffit donc de choisir une sous-famille à deux éléments de la famille $\{f(p_0), f(p_1), f(p_2)\}$. Pour ce choix, on remarque que

$$\begin{aligned} f(p_0) &= 0_{\mathcal{P}_2}, \\ f(p_1) &= p_0 - p_1, \\ f(p_2) &= 2p_1 - p_2. \end{aligned}$$

   On considère alors la famille $\{f(p_1), f(p_2)\}$. Montrons que cette famille est libre, soient α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) = 0_{\mathcal{P}_2}.$$

   D'après les calculs précédents, on a

$$\alpha_1 p_0 + (2\alpha_2 - \alpha_1)p_1 - \alpha_2 p_2 = 0_{\mathcal{P}_2}.$$

   Or la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{P}_2$ donc libre et $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
   La famille $\{f(p_1), f(p_2)\} = \{p_0 - p_1, 2p_1 - p_2\}$ est donc libre et contient 2 éléments, c'est une base de Im f.
5. Déterminer la matrice B de f quand on munit $\mathcal{P}_2$ de la base canonique.
   Correction : D'après la question précédente on a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Sans calcul, que peut-on dire de det B ?
   Correction : Le déterminant de B est nul car une colonne de B est nulle.