MT23 - A2025 - Test 2 - Correction

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Dans cet exercice, on cherche x tel que $Ax = b$.

1. A quel espace appartient x ?
   Correction : $x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. De quels espaces $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
   Correction : $\operatorname{Ker} A \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Im} A \subset \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
3. Peut-on avoir l'existence d'une solution au système $Ax = b$ pour tout $b \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$? Justifier.
   Correction : Non car, d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker} A) + \operatorname{rang} A = 3$.
   Donc $\operatorname{rang} A \leq 3$ et nécessairement $\dim(\operatorname{Im} A) < \dim \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ donc $\exists\, b \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et $b \notin \operatorname{Im} A$.
4. S'il existe une solution au système $Ax = b$, peut-elle être unique ? Si oui, à quelle condition ?
   Correction : Oui si $\operatorname{rang} A = 3 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$.
   Dans ce cas, si x et x' sont 2 solutions, $A(x - x') = 0$ donc $x - x' = 0$ et $x = x'$.

Exercice 2 Soit A la matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de $(A - I)$ et $(A - 2I)$ (Justifier la réponse).
   Correction :

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   $A - I$ est non nulle et ses 3 lignes sont identiques donc $\operatorname{rang}(A - I) = 1$.
   Les 3 colonnes de $A - 2I$ sont liées (déterminant nul, ou somme des colonnes nulle, ou...) et les 2 dernières colonnes sont non colinéaires donc forment une famille libre d'où $\operatorname{rang}(A - 2I) = 2$.
2. En déduire les valeurs propres de A et leur multiplicité.
   Correction : D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(A - I) = \dim V_1 = 2$ et $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I) = \dim V_2 = 1$ donc 1 et 2 sont valeurs propres de A. Sachant que la dimension du sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité, et que la somme des multiplicités est au plus égale à 3, on en déduit que 1 est valeur propre double et 2 est valeur propre simple.
3. En déduire le polynôme caractéristique de A.
   Correction : Grâce aux valeurs propres, on a la forme factorisée du polynôme caractéristique de A : $\pi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$.
4. Justifier l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice P inversible (que l'on ne demande pas de calculer) vérifiant $A = P\,D\,P^{-1}$.
   Correction : On a la somme des dimensions des sous-espaces propres qui est égale à 3 donc la matrice A est diagonalisable et il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.
5. Expliciter D en justifiant la construction de D et P.
   Indication : on pourra utiliser l'application $f : x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mapsto Ax \in \mathcal{M}_{3,1}$.
   Correction : Soit (Y_1, Y_2) une base de V_1 et Y_2 une base de V_2.
   D'après le cours, (Y_1, Y_2, Y_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}$.
   Soit P la matrice formée de ces vecteurs, $P = (Y_1\ Y_2\ Y_3)$, matrice de passage entre la base canonique et la base (Y_1, Y_2, Y_3).
   La matrice représentant f dans la base canonique est A.
   La matrice représentant f dans la base (Y_1, Y_2, Y_3) est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   On a donc $A = P\,D\,P^{-1}$.
   $\boxed{\text{ou}}$

$$\begin{aligned} AP &= A(Y_1\ Y_2\ Y_3) = (AY_1\ AY_2\ AY_3) = (Y_1\ Y_2\ 2Y_3) \\ &= (Y_1\ Y_2\ Y_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et I (la matrice identité).
   Correction : $\pi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$ donc, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0 \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}(A^3 - 4A^2 + 5A) \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$$

Exercice 3 Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien.

1. Donner la définition du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.
   Rappeler également la définition de la norme associée à ce produit scalaire.
   Correction : Un produit scalaire est une application de $E \times E \to \mathbb{R}$ qui à $(\vec{x}, \vec{y})$ associe $< \vec{x}, \vec{y} >$ qui est : $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
   — bilinéaire : $< \alpha\vec{x} + \beta\vec{z}, \vec{y} >= \alpha < \vec{x}, \vec{y} > +\beta < \vec{z}, \vec{y} >$
     et $< \vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z} >= \alpha < \vec{x}, \vec{y} > +\beta < \vec{x}, \vec{z} >$
   — symétrique : $< \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{y}, \vec{x} >$
   — définie positive : $< \vec{x}, \vec{x} >\geq 0$ et $< \vec{x}, \vec{x} >= 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$
   La norme associée est définie par : $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Donner la définition de $F^\perp$, l'orthogonal de F.
   Correction : $F^\perp = \{x \in E / \forall\ y \in E, < x, y >= 0\}$
3. soit Q la matrice suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   La matrice Q est-elle orthogonale ?
   Si oui, le justifier. Si non, modifier les coefficients de Q pour qu'elle le soit.
   Correction : On remarque qu'on a bien $Q_1^\intercal Q_2 = Q_1^\intercal Q_3 = Q_2^\intercal Q_3 = 0$ donc les colonnes sont orthogonales. Par contre, elles ne sont pas de norme 1. Il faut donc les normer pour obtenir une matrice orthogonale, et on obtient :

$$Q' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$