MT23-P2026 - Examen médian
Durée : 1 heure 30 min.
Aucun outil numérique – pas de documents

RÉDIGER LES EXERCICES 1 et 2 SUR UNE COPIE
ET LES EXERCICES 3 et 4 SUR UNE AUTRE COPIE.

La justification des réponses est primordiale. Prouvez ce que vous énoncez.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 7,5 points)*

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. On rappelle qu'un projecteur est une application linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que $p^2 = p$ (où on a noté $p^2 = p \circ p$ la composée de p avec lui-même). Soient p et q deux projecteurs de $\mathcal{L}(E)$. On étudie

$$\phi = p + q \in \mathcal{L}(E).$$

1. Montrer que si $p \circ q = -q \circ p$ alors $p \circ q = q \circ p = -p \circ q \circ p$.
2. En déduire que ϕ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
3. Montrer que $p \circ q = 0$ est équivalent à $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker(p)}$.
4. On suppose que $p \circ q = q \circ p = 0$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker(p)} \cap \mathrm{Ker(q)}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.
   (c) Que sait-on dans ce cas sur $\mathrm{Ker}(\phi) + \mathrm{Im}(\phi)$? *(On ne demande pas de redémontrer ce résultat du cours).*
   Conclure sur une décomposition de E avec trois sous-espaces vectoriels.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 5 points)*

Prouvez ce que vous énoncez.

Soit $E = \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles 3×3.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble formé par les matrices *symétriques* de E (vérifiant $\forall B \in \mathcal{S}$, $B^T = B$), et $\mathcal{A}$ l'ensemble formé par les matrices *antisymétriques* de E (vérifiant $\forall B \in \mathcal{A}$, $B^T = -B$).

1. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Que valent les éléments diagonaux de $B \in \mathcal{A}$?
3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont en somme directe.
4. Donner une base $\{S_1, S_2, \ldots\}$ de $\mathcal{S}$ et la dimension de $\mathcal{S}$.
5. Donner une base $\{A_1, A_2, \ldots\}$ de $\mathcal{A}$ et la dimension de $\mathcal{A}$.
6. Prouver que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans E.
7. Soit $B \in E$. Calculer les transposées de $B + B^T$ et de $B - B^T$.
   En déduire la décomposition de B avec des éléments de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$.

Exercice 3 : *(barème approximatif : 7 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \geq 0$. On introduit $\mathcal{E}_n = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, la base canonique de $\mathcal{P}_n$. Soit un réel $h > 0$ et soit u l'application définie par :

$$(u(p))(t) = p^{(2)}(t) + \frac{h^2}{12} p^{(4)}(t), \quad \forall p \in \mathcal{P}_4,$$

où on a noté $p^{(k)}$ la $k$ème dérivée de p (ainsi $p^{(1)} = p'$ pour $k = 1$).

1. Montrer que u appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_2)$.
2. Écrire la matrice A de u dans les bases canoniques de $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_2$.
3. Déterminer le noyau de A. En déduire l'image et le rang de u.
4. On définit les familles $\mathcal{Q}_2 = (q_0, q_1, q_2)$ et $\mathcal{Q}_4 = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4)$ avec

   $$q_0(t) = 1,\ q_1(t) = t,\ q_2(t) = t(t+h),\ q_3(t) = t(t+h)(t-h),\ q_4(t) = t^2(t+h)(t-h).$$

   Écrire la matrice M contenant les colonnes de $\mathcal{Q}_4$ écrites dans la base $\mathcal{E}_4$.
5. En déduire que $\mathcal{Q}_4$ est une base de $\mathcal{P}_4$, puis que $\mathcal{Q}_2$ est une base de $\mathcal{P}_2$.
6. Calculer la matrice B de u dans les bases $\mathcal{Q}_4$ et $\mathcal{Q}_2$. Bien justifier.
7. Calculer $u(q_4)$ et comparer avec B.

Exercice 4 : *(barème approximatif : 2 points)*

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit A une matrice $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$, dont on note A_1, A_2 et A_3 les trois colonnes.

1. Calculer $\Delta = \det(A_1 + A_2 \mid A_2 + A_3 \mid A_3 + A_1)$, en fonction de $\det(A)$, en expliquant ce que vous faites et les règles que vous utilisez.
2. Calculer $\det(3A)$ en fonction de $\det(A)$.