

MT23-P2026 - Examen médian

Durée : 1 heure 30 min.

Aucun outil numérique – pas de documents

**RÉDIGER LES EXERCICES 1 et 2 SUR UNE COPIE
ET LES EXERCICES 3 et 4 SUR UNE AUTRE COPIE.**

La justification des réponses est primordiale. Prouvez ce que vous énoncez.

Exercice 1 : (*barème approximatif : 7,5 points*)

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. On rappelle qu'un projecteur est une application linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que $p^2 = p$ (où on a noté $p^2 = p \circ p$ la composée de p avec lui-même). Soient p et q deux projecteurs de $\mathcal{L}(E)$. On étudie

$$\phi = p + q \in \mathcal{L}(E).$$

1. Montrer que si $p \circ q = -q \circ p$ alors $p \circ q = q \circ p = -p \circ q \circ p$.

Réponse : on compose $p \circ q = -q \circ p$ à gauche et à droite par p , et on utilise l'associativité de la composition pour obtenir :

$$p^2 \circ q = p \circ q = -p \circ q \circ p \quad \text{et} \quad p \circ q \circ p = -q \circ p^2 = -q \circ p.$$

Pour certaines démonstrations, on peut avoir besoin de la linéarité sur $\mathcal{L}(E)$ qui implique par exemple que $p \circ (-q) = -p \circ q$ (qui s'écrit pour tout $x \in E$: $p(-q(x)) = -p(q(x))$) et on a utilisé la linéarité de p . □

2. En déduire que ϕ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Réponse : on commence par remarquer que :

$$\begin{aligned} \phi^2 = \phi &\iff (p + q) \circ (p + q) = p + q \\ &\iff p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q \\ &\iff p \circ q = -q \circ p, \end{aligned}$$

car $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

Donc, d'une part, si $p \circ q = q \circ p = 0$, il vient immédiatement $\phi^2 = \phi$.

Réciproquement, si $\phi^2 = \phi$, alors $p \circ q = -q \circ p$ et, d'après la question précédente, on a également $p \circ q = q \circ p$. Ces 2 équations prouvent alors que $p \circ q = q \circ p = 0$.

On a bien prouvé l'équivalence voulue. □

3. Montrer que $p \circ q = 0$ est équivalent à $\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p)$.

Réponse : si $p \circ q = 0$, alors soit $y \in \text{Im}(q)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = q(x)$. On en déduit que $p(y) = (p \circ q)(x) = 0$, et donc que $y \in \text{Ker}(p)$. On a bien $\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p)$. □

4. On suppose que $p \circ q = q \circ p = 0$.

(a) Montrer que $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Réponse : on travaille par double inclusion.

Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$. On a donc $p(x) = q(x) = 0$ et donc $\phi(x) = (p + q)(x) = p(x) + q(x) = 0$ et x est dans $\text{Ker}(\phi)$. On a montré : $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(\phi)$

Réciproquement : soit $x \in \text{Ker}(\phi)$. On a donc $\phi(x) = 0 = p(x) + q(x)$, donc $p(x) = -q(x)$. On applique p à cette équation :

$$p^2(x) = p(x) = -(p \circ q)(x) = 0,$$

car $p \circ q = 0$. On en déduit que $p(x) = 0 = q(x)$ et donc que $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Conclusion : on a montré que $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$. \square

(b) Montrer que $\text{Im}(\phi) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

Réponse : il faut montrer la double inclusion et que les images de p et de q sont en somme directe.

Soit $y \in \text{Im}(\phi)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = \phi(x) = p(x) + q(x)$. Donc $y \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. On a montré $\text{Im}(\phi) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

Soit $y \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$. Il existe donc x_1 et x_2 (différents *a priori*) dans E tels que $y = p(x_1) = q(x_2)$. On applique p à l'équation pour obtenir :

$$p(y) = p^2(x_1) = p(x_1) = y = p \circ q(x_2) = 0,$$

car $p \circ q = 0$. On conclut donc que $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \{0\}$ et donc que $\text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q)$ sont en somme directe.

Enfin, soit $y \in \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$. Il existe donc $z_1 \in \text{Im}(p)$ et $z_2 \in \text{Im}(q)$ (uniques mais différents *a priori*), tels que $y = z_1 + z_2$. Il existe donc x_1 et x_2 dans E tels que $y = p(x_1) + q(x_2)$. On applique successivement p et q à cette équation :

$$p(y) = p^2(x_1) + (p \circ q)(x_2) = p(x_1) \quad \text{et} \quad q(y) = (q \circ p)(x_1) + q^2(x_2) = q(x_2).$$

On conclut donc que $y = p(y) + q(y) = \phi(y)$. Donc y est dans $\text{Im}(\phi)$, et on obtient donc $\text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q) \subset \text{Im}(\phi)$.

Finalement on a bien montré que

$$\text{Im}(\phi) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q).$$

\square

(c) Que sait-on dans ce cas sur $\text{Ker}(\phi) + \text{Im}(\phi)$? (*On ne demande pas de redémontrer ce résultat du cours*).

Conclure sur une décomposition de E avec trois sous-espaces vectoriels.

Réponse : d'après le cours, comme ϕ est une projection, on a $E = \text{Ker}(\phi) \oplus \text{Im}(\phi)$, et on déduit alors que $E = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \oplus \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$. \square

Exercice 2 : (*barème approximatif : 5 points*)

Prouvez ce que vous énoncez.

Soit $E = \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles 3×3 .

On note \mathcal{S} l'ensemble formé par les matrices *symétriques* de E (vérifiant $\forall B \in \mathcal{S}, B^T = B$), et \mathcal{A} l'ensemble formé par les matrices *antisymétriques* de E (vérifiant $\forall B \in \mathcal{A}, B^T = -B$).

1. Montrer que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont des sous-espaces vectoriels de E .

Réponse : comme $0^T = 0 = -0$, la matrice nulle appartient à \mathcal{S} et \mathcal{A} .

Comme la transposition est linéaire, on a pour tous B, C de \mathcal{S} et tout λ dans \mathbb{R} :

$$(B + C)^T = B^T + C^T = B + C, \quad (\lambda B)^T = \lambda B^T = \lambda B,$$

et donc \mathcal{S} est un seV de E . Et pour tous B, C de \mathcal{A} et tout λ dans \mathbb{R} :

$$(B + C)^T = B^T + C^T = -B - C = -(B + C), \quad (\lambda B)^T = \lambda B^T = -(\lambda B),$$

ce qui prouve que \mathcal{A} est un seV de E . □

2. Que valent les éléments diagonaux de $B \in \mathcal{A}$?

Réponse : ils sont nuls, prouvez-le. □

3. Montrer que les sous-espaces vectoriels \mathcal{S} et \mathcal{A} sont en somme directe.

Réponse : si $B \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, alors $B^T = B = -B$, donc $2B = 0$, soit $B = 0$. On conclut que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont en somme directe. □

4. Donner une base $\{S_1, S_2, \dots\}$ de \mathcal{S} et la dimension de \mathcal{S} .

Réponse : voir TD chapitre 2, exercice A.2.8. On pose $(E^{i,j})_{i,j \in \{1,2,3\}}$ la base canonique de E (où pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $E^{i,j}$ est une matrice ne contenant que des zéros, sauf en (i, j) où elle vaut 1). On a

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{S} &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\iff A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff A \in \text{Vect}\langle S_1, S_2, \dots, S_6 \rangle, \end{aligned}$$

où $S_i = E^{i,i}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $S_4 = E^{2,1} + E^{1,2}$, $S_5 = E^{3,1} + E^{1,3}$ et $S_6 = E^{2,3} + E^{3,2}$.

On note que les S_i appartiennent bien à \mathcal{S} . On en déduit que $\{S_1, S_2, \dots, S_6\}$ est génératrice de \mathcal{S} .

De plus, on vérifie que $\{S_1, S_2, \dots, S_6\}$ est libre : soit $(\mu_i)_{i \in \{1, \dots, 6\}}$ dans \mathbb{R}^6 tels que $\sum_{i=1}^6 \mu_i S_i = 0$. Alors en prenant successivement les termes diagonaux et au-dessus de la diagonale dans cette matrice, on obtient que les μ_i sont tous nuls.

Conclusion : $\{S_1, S_2, \dots, S_6\}$, libre et génératrice, est une base de \mathcal{S} , qui est donc de dimension 6. □

5. Donner une base $\{A_1, A_2, \dots\}$ de \mathcal{A} et la dimension de \mathcal{A} .

Réponse : cette fois, il vient :

$$\begin{aligned}
 A \in \mathcal{A} &\iff A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff A = a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff A \in \text{Vect}\langle A_1, A_2, A_3 \rangle,
 \end{aligned}$$

où $A_1 = E^{1,2} - E^{2,1}$, $A_2 = E^{1,3} - E^{3,1}$ et $A_3 = E^{2,3} - E^{3,2}$.

On note encore que les A_i appartiennent à \mathcal{A} . On en déduit que $\{A_1, A_2, A_3\}$ est génératrice de \mathcal{A} .

De plus, on vérifie que $\{A_1, A_2, A_3\}$ est libre : soit $(\mu_i)_{i \in \{1, \dots, 3\}}$ dans \mathbb{R}^3 tels que $\sum_{i=1}^3 \mu_i A_i = 0$. Alors en prenant successivement les termes au-dessus de la diagonale, on obtient que les μ_i sont tous nuls.

Conclusion : $\{A_1, A_2, A_3\}$, libre et génératrice, est une base de \mathcal{A} , qui est donc de dimension 3. \square

6. Prouver que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont supplémentaires dans E .

Réponse : on sait déjà que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont en somme directe, il reste à prouver que leur somme est égale à E . Pour cela, on utilise les dimensions.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\} \\ \dim(\mathcal{S}) + \dim(\mathcal{A}) = 6 + 3 = 9 = \dim(E) \end{array} \right\} \implies E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

Ils sont bien supplémentaires dans E . \square

7. Soit $B \in E$. Calculer les transposées de $B + B^T$ et de $B - B^T$.
En déduire la décomposition de B avec des éléments de \mathcal{S} et \mathcal{A} .

Réponse : comme la transposition est linéaire et idempotente ($(B^T)^T = B$), et d'après les propriétés de groupe commutatif de E , on a

$$(B + B^T)^T = B^T + B = B + B^T \quad \text{et} \quad (B - B^T)^T = B^T - B = -(B - B^T).$$

On observe donc que $(B + B^T)$ est symétrique et $(B - B^T)$ est antisymétrique, on note que leur somme vaut $2B$, et on en déduit l'unique décomposition de B dans $E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ qui s'écrit

$$B = \frac{1}{2}(B + B^T) + \frac{1}{2}(B - B^T).$$

\square

Exercice 3 : (barème approximatif : 7 points) **CHANGEZ DE COPIE**

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit \mathcal{P}_n l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \geq 0$. On introduit $\mathcal{E}_n = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, la base canonique de \mathcal{P}_n . Soit un réel $h > 0$ et soit u l'application définie par :

$$(u(p))(t) = p^{(2)}(t) + \frac{h^2}{12}p^{(4)}(t), \quad \forall p \in \mathcal{P}_4,$$

où on a noté $p^{(k)}$ la k ème dérivée de p (ainsi $p^{(1)} = p'$ pour $k = 1$).

Réponse : on commence par noter que la définition de u est licite, car les polynômes sont indéfiniment dérivables... \square

1. Montrer que u appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_2)$.

Réponse : c'est immédiat d'après la linéarité de la dérivation, car pour tout λ et μ dans \mathbb{R} et pour tout p et q dans \mathcal{P}_4 , on a

$$\begin{aligned} u(\lambda p + \mu q)(t) &= (\lambda p + \mu q)^{(2)}(t) + \frac{h^2}{12}(\lambda p + \mu q)^{(4)}(t) \\ &= \lambda p^{(2)}(t) + \mu q^{(2)}(t) + \lambda \frac{h^2}{12}p^{(4)}(t) + \mu \lambda \frac{h^2}{12}q^{(4)}(t) \\ &= \lambda u(p)(t) + \mu u(q)(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De plus, si $\deg(p) \leq 4$, alors $\deg(p^{(2)}) \leq 4 - 2 = 2$ et $\deg(p^{(4)}) \leq 4 - 4 = 0$ (en prenant pour convention que le polynôme nul a un degré égal à $-\infty$). Donc $u(p)$ est dans \mathcal{P}_2 si p est dans \mathcal{P}_4 . \square

2. Écrire la matrice A de u dans les bases canoniques de \mathcal{P}_4 et \mathcal{P}_2 .

Réponse : les colonnes de A sont les composantes de $u(p_i)$ écrites dans la base canonique de \mathcal{P}_2 . Comme

$$u(p_0) = 0, \quad u(p_1) = 0, \quad u(p_2) = 2p_0, \quad u(p_3) = 6p_1, \quad u(p_4) = 12p_2 + 2h^2p_0,$$

il vient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 2h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Pour un $p = \sum_{i=0}^4 \alpha_i p_i \in \mathcal{P}_4$, il vient

$$u(p) = (2\alpha_2 + 2h^2\alpha_4)p_0 + 6\alpha_3p_1 + 12\alpha_4p_2. \quad (1)$$

\square

3. Déterminer le noyau de A . En déduire l'image et le rang de u .

Réponse : la matrice carrée des 3 dernières colonnes de A est clairement inversible (matrice triangulaire, de déterminant le produit des termes diagonaux, soit $2 * 6 * 12 \neq 0$). Le rang de A est donc supérieur ou égal à 3. Les 2 premières colonnes sont nulles, donc $\text{rang}(A) = 3$.

Soit $x \in \mathbb{R}^5$ dans le noyau de A : $Ax = 0$ est équivalent à

$$\begin{cases} 2x_3 + 2h^2x_5 = 0 \\ 3x_4 = 0 \\ 12x_5 = 0 \end{cases} \iff x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

Donc $\text{Ker}(A) = \{(x_1, x_2, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. En terme de polynôme, cela signifie que $\text{Ker}(u) = \mathcal{P}_1$. (En raisonnant sur les polynômes, on trouverait la même chose : soit $p = \sum_{i=0}^4 x_{i+1}p_i \in \mathcal{P}_4$ tel que $u(p) = 0$, alors on obtient le même système que ci-dessus en remarquant que la famille $\{p_2, p_3, p_4\}$ est libre en tant que sous-famille de la base de \mathcal{P}_4 . Cela fait sens, car l'image des polynômes constants et de degré 1 par u est nulle.)

Comme A représente u dans les bases \mathcal{E}_4 et \mathcal{E}_2 , on a une base de $\text{Ker}(u)$ est $\{p_2, p_3, p_4\}$. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathcal{P}_4) = 5 = \dim(\text{Ker}(u) + \text{rang}(u)),$$

d'où on déduit $\text{rang}(u) = 3$ (autre démonstration, voir aussi la matrice carrée 3×3 extraite de A et inversible). Conclusion $\text{rang}(u) = \dim \mathcal{P}_2$, donc $\text{Im}(u) = \mathcal{P}_2$ dont une base possible est \mathcal{E}_2 .

Remarque : on aurait aussi pu faire autrement.

Par définition, $\text{Im}(A) = \text{Vect}\langle A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \rangle$, donc $\text{Im}(A) = \text{Vect}\langle A_3, A_4, A_5 \rangle = \text{Vect}\langle 2e_1, 3e_2, 12e_3 + 2h^2e_1 \rangle = \text{Vect}\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ où $(e_i)_{i=1,2,3}$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 . En termes de polynôme, on obtient donc $\text{Im}(u) = \text{Vect}\langle p_0, p_1, p_2 \rangle = \mathcal{P}_2$. (En partant de l'équation (1), on obtiendrait immédiatement le même résultat.) \square

4. On définit les familles $\mathcal{Q}_2 = (q_0, q_1, q_2)$ et $\mathcal{Q}_4 = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4)$ avec

$$q_0(t) = 1, \quad q_1(t) = t, \quad q_2(t) = t(t+h), \quad q_3(t) = t(t+h)(t-h), \quad q_4(t) = t^2(t+h)(t-h).$$

Écrire la matrice M contenant les colonnes de \mathcal{Q}_4 écrites dans la base \mathcal{E}_4 .

Réponse : les colonnes de M sont les composantes des q_j écrites dans la base des p_i . Comme

$$q_0 = p_0, \quad q_1 = p_1, \quad q_2 = p_2 + hp_1, \quad q_3 = p_3 - h^2p_1, \quad q_4 = p_4 - h^2p_2,$$

il vient

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h & -h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

\square

5. En déduire que \mathcal{Q}_4 est une base de \mathcal{P}_4 , puis que \mathcal{Q}_2 est une base de \mathcal{P}_2 .

Réponse : la matrice M est triangulaire, son déterminant est le produit de ses termes diagonaux, donc $\det(M) = 1 \neq 0$. Donc M est inversible, ce qui est équivalent au fait que la famille \mathcal{Q}_4 est une base de \mathcal{P}_4 (cf. Proposition II.2.5 du Chapitre 2). Donc M est une matrice de passage entre \mathcal{E}_4 et \mathcal{Q}_4 .

La sous-famille \mathcal{Q}_2 de \mathcal{Q}_4 est libre. Elle est aussi dans \mathcal{P}_2 , et contient 3 éléments : c'est une base de \mathcal{P}_2 et la matrice

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

représentant les coordonnées de la base \mathcal{Q}_2 dans la base \mathcal{E}_2 est la matrice de passage entre \mathcal{E}_2 et \mathcal{Q}_2 . \square

6. Calculer la matrice B de u dans les bases \mathcal{Q}_4 et \mathcal{Q}_2 . Bien justifier.

Réponse : il suffit d'appliquer la formule de changement de base avec précaution.

$$B = B_{\mathcal{Q}_2 \leftarrow \mathcal{Q}_4} = (N^{-1})_{\mathcal{Q}_2 \leftarrow \mathcal{E}_2} A_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{E}_4} M_{\mathcal{E}_4 \leftarrow \mathcal{Q}_4} = N^{-1}AM.$$

Après quelques calculs (calcul de l'inverse de N , l'inverse de M est inutile ici, et calcul du produit matriciel $N^{-1}AM$), on obtient :

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Les colonnes de B sont les composantes de $(u(q_j))_{j=0,\dots,4}$ écrites dans la base \mathcal{Q}_2 □

7. Calculer $u(q_4)$ et comparer avec B .

Réponse : Comme

$$q_4(t) = t^4 - h^2t^2, \quad q_4^{(2)}(t) = 12t^2 - 2h^2, \quad q_4^{(4)}(t) = 24,$$

donc

$$u(q_4) = 12X^2 = 12(X^2 + hX) - 12hX = 12q_2 - 12hq_1.$$

C'est bien cohérent avec la dernière colonne de B . □

Exercice 4 : (barème approximatif : 2 points)

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit A une matrice $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$, dont on note A_1 , A_2 et A_3 les trois colonnes.

1. Calculer $\Delta = \det(A_1 + A_2 \mid A_2 + A_3 \mid A_3 + A_1)$, en fonction de $\det(A)$, en expliquant ce que vous faites et les règles que vous utilisez.

Réponse : il y a très peu de calculs. En utilisant la multilinéarité du déterminant, le fait que le déterminant s'annule si 2 colonnes sont égales et que le déterminant change de signe si on échange 2 colonnes, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(A_1 + A_2 \mid A_2 + A_3 \mid A_3 + A_1) \\ &= \det(A_1 \mid A_2 \mid A_3) + \det(A_1 \mid A_2 \mid A_1) + \det(A_1 \mid A_3 \mid A_3) + \det(A_1 \mid A_3 \mid A_1) \\ &\quad + \det(A_2 \mid A_2 \mid A_3) + \det(A_2 \mid A_2 \mid A_1) + \det(A_2 \mid A_3 \mid A_3) + \det(A_2 \mid A_3 \mid A_1) \\ &= \det(A_1 \mid A_2 \mid A_3) + \det(A_2 \mid A_3 \mid A_1) = \det(A_1 \mid A_2 \mid A_3) - \det(A_2 \mid A_1 \mid A_3) \\ &= \det(A_1 \mid A_2 \mid A_3) + \det(A_1 \mid A_2 \mid A_3) = 2 \det(A_1 \mid A_2 \mid A_3) \\ &= 2 \det(A). \end{aligned}$$

□

2. Calculer $\det(3A)$ en fonction de $\det(A)$.

Réponse : par multilinéarité du déterminant (ou directement d'après le cours), on a

$$\begin{aligned} \det(3A) &= \det(3A_1 \mid 3A_2 \mid 3A_3) = 3 \det(A_1 \mid 3A_2 \mid 3A_3) = 9 \det(A_1 \mid A_2 \mid 3A_3) \\ &= 3^3 \det(A). \end{aligned}$$

□