

MT23-P2026 - Examen final

Durée : 2 heures.

Aucun outil numérique – pas de documents

**RÉDIGER LES EXERCICES 1 et 2 SUR UNE COPIE
ET LES EXERCICES 3 et 4 SUR UNE AUTRE COPIE.**

La justification des réponses est primordiale. Prouvez ce que vous énoncez.

Exercice 1 : questions de cours (*barème approximatif : 5 points*)

Il est indispensable de prouver les réponses.

Les 3 questions de cet exercice sont indépendantes.

Soit n un entier ≥ 1 . On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|_2$. Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient (λ, y) un couple propre pour A . Montrer que λ est réel.

Indication : on pourra calculer $\langle \bar{y}, Ay \rangle$ et un autre produit scalaire similaire.

2. On note $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ une base orthonormée de vecteurs propres de A , associée aux valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, qu'on suppose ordonnées : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

(a) Calculer $\frac{\langle z_j, Az_j \rangle}{\|z_j\|_2^2}$ pour tous $j = 1, \dots, n$.

(b) Soit x dans $\mathbb{R}^n$ qui s'écrit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$ dans la base $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$.
Calculer $\|x\|_2^2$ en fonction des α_i .

(c) Calculer $\langle x, Ax \rangle$.

(d) En déduire que si $x \neq 0$, alors

$$\lambda_1 \leq \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|_2^2} \leq \lambda_n.$$

3. Soit E un espace euclidien et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E .

(a) Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$.

(b) Montrer que $F = (F^\perp)^\perp$ en utilisant un argument de dimension.

(c) Montrer que $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$.

(d) Dédurre des questions précédentes que $F \subset G \iff G^\perp \subset F^\perp$.

Exercice 2 : (*barème approximatif : 4 points*)

Il est indispensable de prouver les réponses.

Il est possible répondre à la question 2) sans avoir traité la question 1).

Soient μ_1 et μ_2 deux réels tels que $\mu_1\mu_2 = -14$. On se donne les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

1. À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ notée $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ à partir des $(x_i)_{i=1, \dots, 4}$.
2. Quelles propriétés satisfait la matrice P , dont les colonnes sont les vecteurs (y_1, y_2, y_3, y_4) ?
3 propriétés du cours sont attendues. Aucune démonstration n'est demandée ici.

**RÉDIGEZ LES EXERCICES 3 et 4 SUR UNE COPIE SÉPARÉE
DES EXERCICES 1 et 2.**

Exercice 3 : (*barème approximatif : 5 points*)

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit n un entier ≥ 2 . On se donne un réel a . Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & & 0 & 0 & 3 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & n-2 & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la forme quadratique associée à A , notée $q_a(x)$.
2. Faire la réduction de Gauss en carrés.
On pourra utiliser la notation $s_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} i \left(= \frac{n(n-1)}{2} \right)$.
3. Donner des conditions sur a pour que q_a soit définie positive ou semi-définie positive.
On justifiera bien les cas où $q_a(x) > 0$, $= 0$ ou < 0 .
4. Dire, en le justifiant, si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Donner, sans les calculer, le nombre de valeurs propres de A qui sont positives, négatives, ou nulles en fonction de a .

RÉDIGEZ CET EXERCICE 4 AVEC L'EXERCICE 3**Exercice 4 :** *(barème approximatif : 8 points)*

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier ≥ 3 . Soit E euclidien de dimension n , dont on nommera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit (u, v) une famille libre de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par

$$f(x) = \langle u, x \rangle u - \langle v, x \rangle v.$$

1. On dit que f est symétrique si $\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.
Démontrer que f est symétrique.
2. On note $F = \text{Vect}(u, v)$.
 - (a) Quelle est la dimension de F ?
 - (b) Montrer que $\text{Ker}(f) = F^\perp$.
 - (c) En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$.
3. Montrer que $\text{Im}(f) \subset F$, puis $\text{Im}(f) = F$.
4. En déduire que E est la somme de 2 sous-espaces vectoriels orthogonaux à préciser.
5.
 - (a) Soit $x = \alpha u + \beta v$ dans F . Calculer $f(x)$.
 - (b) On se donne une base $\{e_1, \dots, e_p\}$ de $\text{Ker}(f)$ (où p est à préciser).
Compléter cette famille en une base de E , notée $\mathcal{B}$.
 - (c) Écrire A , la matrice représentant f dans la base $\mathcal{B}$.
 - (d) Écrire le polynôme caractéristique de A .
 - (e) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Dire dans quel cas il y a égalité dans Cauchy-Schwarz.
Note : on ne demande pas de prouver ce résultat du cours.
 - (f) En déduire que A admet deux valeurs propres distinctes et non nulles, à déterminer.
 - (g) Donner la dimension des sous-espaces propres de A et conclure sur la diagonalisabilité de f .