

MT23-P2025 - Test
Durée : 45 min.
Aucun outil numérique – pas de documents

Réponse : **Corrigé succinct**

□

La justification des réponses est primordiale. Prouvez ce que vous énoncez.

Exercice 1 : (*barème approximatif : 5 points*)

Énoncer clairement les hypothèses et conclusions des théorèmes demandés.

Soit $n \geq 1$ un entier et soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner la définition de couple propre de A .

Réponse : voir cours. On ne fournit que des éléments brefs de réponse pour certaines questions.

□

2. Soit un couple propre (λ, y) de A , tel que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Donner un autre couple propre pour A . Bien justifier.

Réponse : $(\bar{\lambda}, \bar{y})$ est aussi couple propre. À prouver.

□

3. Donner la définition de diagonalisabilité.

Réponse : voir cours.

□

4. Énoncer deux conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité.

Réponse : voir cours.

□

5. On se donne le polynôme caractéristique d'une matrice A :

$$\Pi_A(X) = X^2 - 4X + 3.$$

- (a) Donner le déterminant de A et la trace de A .

Quel est le lien entre les valeurs propres et la trace?

Réponse : voir cours. On n'a pas besoin de connaître A . On pourrait calculer les vp pour vérifier, mais ce n'est pas nécessaire si on connaît son cours.

Remarque : A est la matrice C de l'exercice 3 ci-dessous.

□

- (b) En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, exprimer A^{-1} en fonction de I et A .

Réponse : Cayley-Hamilton implique $\Pi_A(A) = A^2 - 4A + 3I = 0$, dont on déduit (le déterminant est non-nul) : $A(-\frac{1}{3}(A - 4I)) = I$ et donc $A^{-1} = -\frac{1}{3}(A - 4I)$.

□

Exercice 2 : (*barème approximatif : 4 points*)

Prouvez ce que vous énoncez.

1. Soient a, b, c, d quatre réels et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{pmatrix}.$$

Calculer $\Delta = \det(A)$.

Réponse : en retranchant par exemple la première colonne aux 3 autres, et en développant par rapport à la dernière ligne, on obtient une matrice triangulaire supérieure... On obtient $\Delta = -a(b - a)^3$.

□

2. Soit n un entier, et u l'endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ (espace des polynômes de degré $\leq n$) défini par $u(p) = Xp' + p(1)$.
 Calculer le déterminant de u .
 Expliquez ce que vous faites pour calculer $\det(u)$.

Réponse : le déterminant ne dépend pas de la base choisie (car si A et A' sont la représentation de u dans deux bases, dont la matrice de passage est P , alors on a : $\det(A') = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$). Par conséquent, on peut choisir la base canonique : si $p = 1$, on a $u(1) = 0 + 1(1) = 1$. Si $p = X^n$ pour $n \geq 1$, on a $u(X^n) = X(nX^{n-1}) + X^n(1) = X^n + 1$. Donc la représentation de u dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

A étant triangulaire supérieure, son déterminant est le produit des termes diagonaux, soit $\det(u) = \det(A) = n! (\neq 0)$. L'endomorphisme est donc bijectif. $\square$

Exercice 3 : (*barème approximatif : 11 points*)
Prouvez ce que vous énoncez.

1. Soient les matrices A , B et C définies par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- (a) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A .

Prouver que A est diagonalisable et écrire la relation matricielle associée (liant A à une matrice diagonale à préciser, avec une autre matrice également à préciser).

Réponse : A admet 3 vp distinctes complexes (2 , i et $-i$), donc elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Pour les vp complexes, comme A est réelle, on n'a besoin que de calculer le vecteur propre y associé à i , et on aura sans calcul $\bar{y}$ associé à $\bar{i} = -i$ (cf. exercice 1, q2.). (**La connaissance du cours aide...**) On remarque que $\text{Tr}(A) = 2 = 2 + i + \bar{i}$, ce qui permet de vérifier rapidement les calculs.

On obtient $D_A = P_A^{-1}AP_A$, où les colonnes de P_A sont les vecteurs propres de A et les termes diagonaux de D_A sont les vp. Les matrices P_A et D_A dépendent de l'ordre choisi pour les vp. Par exemple

$$D_A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_A = \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

- (b) Mêmes questions pour C .

Réponse : C admet 2 vp distinctes réelles (3 et 1), donc elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On remarque que $\text{Tr}(C) = 4 = 3 + 1$, ce qui permet de vérifier rapidement les calculs.

On obtient $D_C = P_C^{-1}CP_C$ avec par exemple

$$D_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

2. Soit n et p deux entiers ≥ 1 . Dans cette question, $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ sont des matrices quelconques. On introduit M la matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

- (a) Soit (λ, X) un couple propre pour A , tel que λ n'est pas valeur propre pour C .

- i. La matrice $C - \lambda I$ est-elle injective? Justifier.

Réponse : λ n'est pas vp pour C , donc $\ker(C - \lambda I_p) = \{0\}$, et $C - \lambda I_p$ est injective. □

- ii. Déterminer un couple propre pour M .

Note : on pourra introduire un vecteur par blocs $Z = [X, Y]^T \in \mathcal{M}_{n+p,1}$.

Réponse : on a pour tout $Z \in \mathcal{M}_{n+p,1}$ en utilisant le produit par blocs

$$\begin{aligned} MZ = \lambda Z &\iff \begin{cases} AX + BY = \lambda X \\ CY = \lambda Y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (C - \lambda I_p)Y = 0 \\ (A - \lambda I_n)X = -BY \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} Y = 0 \\ (A - \lambda I_n)X = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

donc en prenant X un vecteur propre associé à λ pour A ($X \in \ker(A - \lambda I_n)$ et $X \neq 0$), on obtient le couple propre $(\lambda, \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix})$ pour M (le vecteur est non nul car $X \neq 0$). □

- (b) Soit (μ, Y) un couple propre pour C , tel que μ n'est pas valeur propre pour A . Déterminer un couple propre pour M .

Réponse : μ n'est pas vp pour A , donc $\ker(A - \mu I_n) = \{0\}$, et $A - \mu I_n$ est injective et carrée, donc, en utilisant le théorème du rang, elle est bijective.

Cette fois-ci, on a pour tout $Z \in \mathcal{M}_{n+p,1}$

$$\begin{aligned} MZ = \mu Z &\iff \begin{cases} AX + BY = \mu X \\ CY = \mu Y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (C - \mu I)Y = 0 \\ (A - \mu I)X = -BY \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} Y \in \ker(C - \mu I_p) \\ X = -(A - \mu I_n)^{-1}BY \end{cases}, \end{aligned}$$

donc en prenant Y un vecteur propre associé à μ pour C ($Y \in \ker(C - \mu I_p)$ et $Y \neq 0$), on obtient un couple propre $(\mu, \begin{bmatrix} -(A - \mu I_n)^{-1}BY \\ Y \end{bmatrix})$ pour M (le vecteur est non nul car $Y \neq 0$). □

3. En déduire les valeurs propres et vecteurs propres de M , quand A , B et C sont données dans (1).

Note : on rappelle qu'il vaut mieux résoudre un système linéaire, plutôt que d'inverser une matrice.

Réponse : Comme M est triangulaire supérieure par blocs, on sait que $\det(M - \lambda I_{n+p}) = \det(A - \lambda I_n) \det(C - \lambda I_p)$, donc on peut d'ores et déjà noter que M admet pour vp celles de A et de C qui sont toutes distinctes : M est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

En utilisant la question précédente (on peut aussi faire les calculs directement), on obtient les couples propres pour les vp issues de A :

$$(i, \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}), (-i, \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}), (2, \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}),$$

et pour les vp de C ,

$$(3, \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -(A - 3I_2)^{-1}B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}), (1, \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -(A - I_2)^{-1}B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}).$$

Il reste à résoudre les 2 systèmes linéaires précautionneusement (on n'a pas besoin de calculer les matrices inverses!), pour écrire $D = P^{-1}MP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} i & -i & 0 & 3/10 & -1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 1/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□