

MT23-P2025 - Test
Durée : 45 min.
Aucun outil numérique – pas de documents

La justification des réponses est primordiale. Prouvez ce que vous énoncez.

Exercice 1 : (*barème approximatif : 5 points*)

Énoncer clairement les hypothèses et conclusions des théorèmes demandés.

Soit $n \geq 1$ un entier et soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner la définition de couple propre de A .
2. Soit un couple propre (λ, y) de A , tel que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Donner un autre couple propre pour A . Bien justifier.
3. Donner la définition de diagonalisabilité.
4. Énoncer deux conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité.
5. On se donne le polynôme caractéristique d'une matrice A :
 $\Pi_A(X) = X^2 - 4X + 3$.
 - (a) Donner le déterminant de A et la trace de A .
Quel est le lien entre les valeurs propres et la trace?
 - (b) En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, exprimer A^{-1} en fonction de I et A .

Exercice 2 : (*barème approximatif : 4 points*)

Prouvez ce que vous énoncez.

1. Soient a, b, c, d quatre réels et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{pmatrix}.$$

Calculer $\Delta = \det(A)$.

2. Soit n un entier, et u l'endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ (espace des polynômes de degré $\leq n$) défini par $u(p) = Xp' + p(1)$.
Calculer le déterminant de u .
Expliquez ce que vous faites pour calculer $\det(u)$.

Exercice 3 : (*barème approximatif : 11 points*)

Prouvez ce que vous énoncez.

1. Soient les matrices A , B et C définies par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- (a) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A .

Prouver que A est diagonalisable et écrire la relation matricielle associée (liant A à une matrice diagonale à préciser, avec une autre matrice également à préciser).

- (b) Mêmes questions pour C .

2. Soit n et p deux entiers ≥ 1 . Dans cette question, $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ sont des matrices quelconques. On introduit M la matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

- (a) Soit (λ, X) un couple propre pour A , tel que λ n'est pas valeur propre pour C .

i. La matrice $C - \lambda I$ est-elle injective? Justifier.

ii. Déterminer un couple propre pour M .

Note : on pourra introduire un vecteur par blocs $Z = [X, Y]^T \in \mathcal{M}_{n+p,1}$.

- (b) Soit (μ, Y) un couple propre pour C , tel que μ n'est pas valeur propre pour A . Déterminer un couple propre pour M .

3. En déduire les valeurs propres et vecteurs propres de M , quand A , B et C sont données dans (1).

Note : on rappelle qu'il vaut mieux résoudre un système linéaire, plutôt que d'inverser une matrice.