

MT23 - A2025 - Examen final

Durée 2h – Les documents et machines à calculer sont interdits.

Rédigez chaque exercice sur une copie **séparée**.
Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème approximatif : 10 points*) **UNE COPIE PAR PARTIE !!**

Partie I - CHANGER DE COPIE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer le rang de $A - I$. Que peut-on déduire ?
(b) Sans calculer le polynôme caractéristique, donner toutes les valeurs propres de A .
(c) Sans calcul supplémentaire, dire si A est diagonalisable ou non.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.
(a) Montrer que $\text{Ker } M \subset \text{Ker } M^2$.
(b) On suppose que l'inclusion précédente est stricte, donc il existe $Z \in \text{Ker } M^2$ mais $Z \notin \text{Ker } M$.
En déduire que l'on a $MZ = Y$, où $Y \in \text{Ker } M$ et Y non nul.
(c) Soit X tel que (X, Y) est une famille libre de $\text{Ker } M$, montrer que la famille (X, Y, Z) est libre.
3. On cherche une matrice T , semblable à A , de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

- (a) Sans calcul supplémentaire, déterminer c .
 - (b) En utilisant la question 2 avec un choix judicieux pour M et en posant $P = (X \ Y \ Z)$, déterminer a et b tels que $AP = PT$.
4. Déterminer P telle que $p_{11} = 1, p_{22} = 1, p_{13} = 0$ et $p_{23} = 1$.

Partie II - CHANGER DE COPIE

On veut résoudre le système

$$(I) \quad x'(t) = Ax(t) \quad \text{avec} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le système (I) est équivalent au système

$$(II) \quad \begin{cases} z'_1 = z_1 \\ z'_2 = z_2 + z_3 \\ z'_3 = z_3 \end{cases} \quad \text{avec} \quad z(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

où on précisera les scalaires α , β et γ .

2. Résoudre (II) .
3. En déduire l'expression de x solution de (I).

Exercice 2 (*barème approximatif : 10 points*) **UNE COPIE PAR PARTIE !!**

Partie I - CHANGER DE COPIE

On considère I la matrice identité de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $J \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice ne contenant que des 1 et la matrice

$$A = I + J.$$

1. (a) Sans calculer les valeurs propres de A , est-ce que cette matrice est diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
(b) Déterminons les valeurs propres de J .
 - i. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $JX = 3X$.
 - ii. Montrer que $\dim(\text{Ker } J) = 2$ et donner une base de $\text{Ker } J$.
 - iii. En déduire les valeurs propres de J et leur multiplicité.
 - (c) Montrer que si (λ, Y) est un couple propre de J , alors $(1 + \lambda, Y)$ est un couple propre de A .
 - (d) En déduire les valeurs propres de A et indiquer leur multiplicité.
 - (e) En utilisant les questions précédentes, déterminer les bases des espaces propres de A .
 - (f) On pose, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $\langle X, Y \rangle = X^T A Y$. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire.
2. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note R_i la somme des valeurs absolues des coefficients non diagonaux de la ligne i de A .
- (a) Montrer que $R_1 = R_2 = R_3$.
 - (b) Dans la suite on note R l'élément $R_1 = R_2 = R_3$.
 - i. Représenter dans le plan complexe le disque dont le centre est donné par un élément diagonal de A et ayant pour rayon R .
 - ii. Vérifier que toutes les valeurs propres de A appartiennent au disque représenté dans la question précédente. Ce disque est appelé *disque de Gershgorin* de la matrice A .

Partie II - CHANGER DE COPIE

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$). Comme dans la partie précédente, on note $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

De plus, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $D(a_{ii}, R_i)$ le disque du plan centré en a_{ii} et de rayon R_i . L'objectif de cette partie est de démontrer le :

Théorème de Gershgorin. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A alors $\lambda \in \bigcup_{j=1, \dots, n} D(a_{jj}, R_j)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre quelconque de A et X un vecteur propre associé. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ un indice vérifiant

$$|x_i| = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|,$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont les composantes du vecteur X .

1. Le but de cette question est de démontrer le théorème de Gershgorin.

(a) Justifier que $x_i \neq 0$.

(b) En utilisant la ligne i de l'équation $AX = \lambda X$, justifier que $(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$.

(c) En déduire que

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \frac{|x_j|}{|x_i|}.$$

(d) Conclure que $\lambda \in D(a_{ii}, R_i) \subset \bigcup_{j=1, \dots, n} D(a_{jj}, R_j)$.

2. Terminons cet exercice par une application :

On suppose que $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique qui vérifie $a_{ii} > 0$ avec $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Déduire du théorème de Gershgorin que A est définie positive.