

NOM :

PRENOM :

Numéro, jour et horaire du TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (). Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Dans cet exercice on cherche x tel que $Ax = b$.

1. A quel espace appartient le vecteur x vérifiant $Ax = b$? **0.5**
2. De quels espaces, les sous-ensembles $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$, sont-ils des sous espaces vectoriels? **0.5**
3. Peut-on avoir l'existence d'une solution au système $Ax = b$ pour tout $b \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$? **1**
4. S'il existe une solution au système $Ax = b$, peut-elle être unique? **1**

Exercice 2 Soit A la matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de $(A - I)$ et $(A - 2I)$.
2. En déduire les valeurs propres de A et leur multiplicité.
3. En déduire le polynôme caractéristique de A .
4. Justifier l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice P inversible (que l'on ne demande pas de calculer) vérifiant $A = P D P^{-1}$.
5. Expliciter D en justifiant la construction de D et P .
Indication : on pourra utiliser l'application $f : x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mapsto Ax \in \mathcal{M}_{3,1}$.
6. Déterminer A^{-1} en fonction de A^2 , A et I (la matrice identité).

Exercice 3 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1. Donner la définition du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Rappeler également la définition de la norme associée à ce produit scalaire.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Donner la définition de $F^\perp$ l'orthogonal de F .
3. soit Q la matrice suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) La matrice Q est-elle orthogonale ? Si oui, le justifier, si ce n'est pas le cas, modifier les coefficients de Q pour qu'elle le soit.