

NOM :

PRENOM :

Numéro, jour et horaire du TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (3 ; 4,5 ; 2,5). Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1. On note (p_0, p_1, p_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit F_1 le sous-ensemble de $\mathbb{R}_2[X]$ suivant :

$$F_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid \exists a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \quad p = a_0 p_0 + a_1 p_1 - a_1 p_2\}.$$

1. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de F_1 et donner sa dimension.
3. Soit $F_2 = \text{Vect}\langle p_1 \rangle$. Montrer que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2. Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_3) \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
2. Sans calculs, dire si u peut être bijective.
3. Déterminer $\text{Ker } u$ (donner une base et sa dimension).
4. Déterminer $\text{Im } u$ (donner une base et sa dimension).
5. u est-elle injective ? surjective ?
6. Ecrire la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ (on expliquera comment elle est construite).

Exercice 3. Soient E et F deux e.v., $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$.
2. Sous quelle condition sur u la famille $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est-elle une base de $\text{Im } u$? Le démontrer.