

Exercice 1. On note (p_0, p_1, p_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit F_1 le sous-ensemble de $\mathbb{R}_2[X]$ suivant :

$$F_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid \exists a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \quad p = a_0 p_0 + a_1 p_1 - a_1 p_2\}.$$

1. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de F_1 et donner sa dimension.
3. Soit $F_2 = \text{Vect}\langle p_1 \rangle$. Montrer que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}_2[X]$.

Correction.

1. L'ensemble F_1 est non vide car le polynôme nul appartient à F_1 .

De plus, soient $p, q \in F_1$, montrons que $p + q \in F_1$. Pour ce faire, nous savons par définition de F_1 qu'il existe des scalaires a_0, a_1, b_0 et $b_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 - a_1 p_2, \quad q = b_0 p_0 + b_1 p_1 - b_1 p_2.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} p + q &= (a_0 p_0 + a_1 p_1 - a_1 p_2) + (b_0 p_0 + b_1 p_1 - b_1 p_2) \\ &= (a_0 + b_0) p_0 + (a_1 + b_1) p_1 - (a_1 + b_1) p_2, \end{aligned}$$

et donc que $p + q \in F_1$.

Enfin, soient $p \in F_1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha p \in F_1$.

$$\begin{aligned} \alpha p &= \alpha (a_0 p_0 + a_1 p_1 - a_1 p_2) \\ &= (\alpha a_0) p_0 + (\alpha a_1) p_1 - (\alpha a_1) p_2, \end{aligned}$$

et donc $\alpha p \in F_1$.

Ainsi, F_1 est bien un s.e.v. de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. D'après la définition de F_1 , tout élément de F_1 peut s'écrire

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 - a_1 p_2.$$

On peut regrouper les termes en fonction de a_0 et a_1 , i.e., $p = a_0 p_0 + a_1 (p_1 - p_2)$. On vérifie que p_0 et $p_1 - p_2 \in F_1$ et obtient donc

$$F_1 = \text{Vect} \langle p_0, p_1 - p_2 \rangle.$$

Il reste à vérifier que les deux polynômes p_0 et $p_1 - p_2$ sont linéairement indépendants. Soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lambda p_0 + \mu (p_1 - p_2) = 0.$$

En utilisant le fait que (p_0, p_1, p_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\lambda p_0 + \mu p_1 - \mu p_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = -\mu = 0.$$

Les deux polynômes p_0 et $p_1 - p_2$ sont donc linéairement indépendants.

Par conséquent, la famille $(p_0, p_1 - p_2)$ est une base de F_1 , et $\dim(F_1) = 2$.

3. Pour montrer que

$$F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}_2[X],$$

il suffit de montrer que

$$\dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3,$$

— $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Le premier point est évident d'après la question précédente et le fait que $\dim(F_2) = 1$ (car p_1 n'est pas le polynôme nul). Pour le deuxième point, soit $p \in F_1 \cap F_2$. Comme $p \in F_1$, il existe $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 - a_1 p_2.$$

Comme $p \in F_2$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$p = \lambda p_1.$$

On a donc

$$a_0 p_0 + a_1 p_1 - a_1 p_2 = \lambda p_1,$$

soit

$$a_0 p_0 + (a_1 - \lambda) p_1 - a_1 p_2 = 0.$$

Puisque (p_0, p_1, p_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on obtient $a_0 = 0$, $a_1 - \lambda = 0$ et $-a_1 = 0$. Ainsi $a_0 = a_1 = \lambda = 0$ et donc $p \in F_1 \cap F_2$ est le polynôme nul.

Par conséquent $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et on en déduit que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2. Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_3) \quad \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
2. Sans calculs, dire si u peut être bijective.
3. Déterminer $\text{Ker } u$ (donner une base et sa dimension).
4. Déterminer $\text{Im } u$ (donner une base et sa dimension).
5. u est-elle injective ? surjective ?
6. Ecrire A matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ (on expliquera comment elle est construite).

Correction.

1. Pour montrer que u est une application linéaire, il suffit de vérifier que, pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}) \quad \text{et} \quad u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x}).$$

Soient $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} u(\vec{x} + \vec{y}) &= u(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3)) \\ &= (2x_1 - x_2, x_1 + x_3) + (2y_1 - y_2, y_1 + y_3) \\ &= u(\vec{x}) + u(\vec{y}). \end{aligned}$$

De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^3$,

$$u(\lambda \vec{x}) = u(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (2\lambda x_1 - \lambda x_2, \lambda x_1 + \lambda x_3) = \lambda(2x_1 - x_2, x_1 + x_3) = \lambda u(\vec{x}).$$

Ainsi, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

2. On sait que si u est bijective alors $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbb{R}^2)$. Comme $3 \neq 2$, l'application u ne peut donc pas être bijective.
3. Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker } u$. On a

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \text{Ker } u &\Leftrightarrow u(\vec{x}) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = -x_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \vec{x} = x_1 \underbrace{(1, 2, -1)}_{\in \text{Ker } u}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille constituée du vecteur $(1, 2, -1)$ est une famille génératrice de $\text{Ker } u$, i.e.,

$$\text{Ker } u = \text{Vect}\langle(1, 2, -1)\rangle,$$

et comme $(1, 2, -1) \neq (0, 0, 0)$, ce vecteur forme une famille libre de $\text{Ker } u$ et donc une base de $\text{Ker } u$ et on a $\dim(\text{Ker } u) = 1$.

4. Par définition,

$$\text{Im } u = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{y} = u(\vec{x})\}.$$

On sait que l'image d'une base de $\mathbb{R}^3$ est génératrice de $\text{Im } u$. En prenant la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on obtient $\text{Im } u = \text{vect}\langle(2, 1), (-1, 0), (0, 1)\rangle$. De plus, $\text{Im } u \subset \mathbb{R}^2$ donc on a au plus 2 vecteurs

linéairement indépendants.

C'est le cas des vecteurs $(2, 1)$ et $(-1, 0)$ (non colinéaires) donc ils forment une base de $\text{Im } u$ et $\dim(\text{Im } u) = 2$.

ou

$$\begin{aligned}\vec{y} \in \text{Im } u &\Leftrightarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3, u(\vec{x}) = \vec{y} \\ &\Leftrightarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x_1 - x_2 = y_1, \\ x_1 + x_3 = y_2. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x_2 = -y_1 + 2x_1 \\ x_3 = y_2 - x_1 \end{cases}\end{aligned}$$

Pour tout $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\exists \vec{x} = (x_1, -y_1 + 2x_1, y_2 - x_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$ donc $\text{Im } u = \mathbb{R}^2$.

On peut prendre la base canonique et $\dim(\text{Im } u) = 2$.

5. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul. Or

$$\dim(\text{Ker } u) = 1,$$

donc

$$\text{Ker } u \neq \{(0, 0, 0)\}.$$

Ainsi, u n'est pas injective.

Par ailleurs, nous avons montré à la question précédente que $\text{Im } u = \mathbb{R}^2$, donc u est surjective.

On peut également retrouver ces résultats grâce au théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Im } u) = 1 + 2 = 3.$$

6. Notons $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est construite en plaçant dans ses colonnes les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\begin{aligned}u(\vec{e}_1) &= (2, 1) = 2\vec{f}_1 + \vec{f}_2, \\ u(\vec{e}_2) &= (-1, 0) = -\vec{f}_1, \\ u(\vec{e}_3) &= (0, 1) = \vec{f}_2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} u(\vec{e}_1) & u(\vec{e}_2) & u(\vec{e}_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Exercice 3. Soient E et F deux e.v., $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$.
2. Sous quelle condition sur u la famille $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est-elle une base de $\text{Im } u$? Le démontrer.

Correction.

1.

$$\vec{y} \in \text{Im } u \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E, \vec{y} = u(\vec{x})$$

$\vec{x} \in E$, alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n.$$

Par linéarité de u , on en déduit que

$$\vec{y} = u(\vec{x}) = u(\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n) = \alpha_1 u(\vec{e}_1) + \dots + \alpha_n u(\vec{e}_n).$$

On en déduit donc que $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$.

2. D'après la question précédente la famille $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$. Pour que cette famille soit une base de $\text{Im } u$, il suffit de trouver une condition sur u assurant la liberté de cette famille. Pour cela, il suffit de supposer que u est injective.

En effet, on sait d'après le cours que l'image d'une famille libre par une application injective est libre. Montrons-le : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lambda_1 u(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_n u(\vec{e}_n) = \vec{0}.$$

Comme u est linéaire, on en déduit que

$$u(\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n) = \vec{0},$$

et donc $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n \in \text{Ker } u$. Or, si u est injective alors $\text{Ker } u = \{\vec{0}\}$ et donc

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}.$$

Comme la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est libre (car c'est une base de E) alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et donc la famille $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est libre.

Elle forme donc une base de $\text{Im } u$ si u est injective.