Exercices du chapitre 3 avec corrigé succinct

Exercice III.1 Ch3-Exercice1

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3a & c \\ 3b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 1 & 2\lambda \\ 4 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

Solution :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc;$$

$$\begin{vmatrix} 3a & c \\ 3b & d \end{vmatrix} = 3(ad - bc);$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 3 \times 5;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 1 & 2\lambda \\ 4 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda.$$

Exercice III.2 Ch3-Exercice2

1. – Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ triangulaire inférieure ($a_{ij} = 0$ pour $i < j$), en utilisant la définition du déterminant montrer que $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
   – En déduire que :
     – pour les matrices diagonales ($a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$) on a aussi $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$,
     – la matrice identité a pour déterminant $\det I = 1$.
2. Si $\overline{A}$ est la matrice dont les termes sont les conjugués de ceux de A alors $\det \overline{A} = \overline{\det A}$.

Solution : Dans l'exercice précédent on a vu que le déterminant de $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ était égal $4 * 3 * 5$. Le résultat se généralise très facilement à une matrice triangulaire inférieure quelconque (on peut faire un raisonnement par récurrence). Evidemment on en déduit les résultats sur les matrices diagonales et sur la matrice identité. Il est évident en utilisant la définition que $\det \overline{A} = \overline{\det A}$. On utilise en particulier les propriétés bien connues sur les complexes conjugués à savoir, le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, le conjugué d'un produit est le produit des conjugués.

Exercice III.3 Ch3-Exercice3
Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ sont les vecteurs de la base $\mathscr{E}$ de référence, montrer que
$\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = 1$.

Solution : $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = \det I = 1$

Exercice III.4 Ch3-Exercice4

1. L'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est muni de la base canonique $\{p_0, p_1, p_2\}$ considérée comme base de référence, on définit les polynômes p, q, r par
$$p(t) = 3t^2 + 6t + 4,\ q(t) = t^2 + 2t - 1,\ r(t) = -t^2 + 4t + 2,$$
calculer $\det(p, q, r)$.
2. On choisit maintenant comme base de référence la base $\{p_0, q_1, p_2\}$, avec $q_1(t) = 2t - 1$, calculer $\det(p, q, r)$.

Solution :

1. $$\det(p,q,r) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -42$$
2. Après identification on obtient les composantes de p, q, r sur la base $\{p_0, q_1, p_2\}$.
$$p = 3p_2 + 3q_1 + 7p_0,\ q = p_2 + q_1,\ r = -p_2 + 2q_1 + 4p_0$$
$$\det(p,q,r) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -21$$

Exercice III.5 Ch3-Exercice5
Démontrer, à partir de la définition du déterminant par récurrence, l'égalité suivante :
$$\begin{aligned}\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, B + C, A_{k+1}, \ldots, A_n) = \quad & \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \ldots, A_n) + \\ & \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, C, A_{k+1}, \ldots, A_n).\end{aligned}$$

Solution : La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de la matrice :
- pour $n = 1$, c'est évident,
- supposons la propriété vraie à l'ordre $n - 1$,

soit $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n, B, C \in \mathscr{M}_{n,1}$; on note
$$\tilde{A} = (A_1, \ldots, A_{k-1}, B + C, A_{k+1}, \ldots, A_n),$$
$$\tilde{B} = (A_1, \ldots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \ldots, A_n),$$
$$\tilde{C} = (A_1, \ldots, A_{k-1}, C, A_{k+1}, \ldots, A_n)$$
La définition du déterminant donne :
$$\det \tilde{A} = \sum_{j \neq k} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{A}_{|1,j|} + (-1)^{1+k} (b_1 + c_1) \det \tilde{A}_{|1,k|}.$$
En effet $\tilde{a}_{1j} = a_{1j}$ pour $j \neq k$ et $\tilde{a}_{1k} = b_1 + c_1$.
Pour $j \neq k$, la matrice $\tilde{A}_{|1,j|} \in \mathscr{M}_{n-1,n-1}$ donc, par hypothèse de récurrence, on a

$$\det \tilde{A}_{|1,j|} = \det \tilde{B}_{|1,j|} + \det \tilde{C}_{|1,j|}.$$

De plus

$$\det \tilde{B} = \sum_{j\neq k} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{B}_{|1,j|} + (-1)^{1+k} b_1 \det \tilde{B}_{|1,k|}.$$

$$\det \tilde{C} = \sum_{j\neq k} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{C}_{|1,j|} + (-1)^{1+k} c_1 \det \tilde{C}_{|1,k|}.$$

Il suffit maintenant de remarquer que les matrices $\tilde{A}_{|1,k|}, \tilde{B}_{|1,k|}, \tilde{C}_{|1,k|}$ sont identiques donc elles ont le même déterminant. On obtient alors le résultat :

$$\det \tilde{A} = \det \tilde{B} + \det \tilde{C}$$

Exercice III.6 Ch3-Exercice6
Montrer que si A a une colonne nulle, alors $\det A = 0$.

Solution : Si la colonne A_k de A est nulle, si on note B la matrice dont les colonnes sont $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, -A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n$, on a $\det B = -\det A$ à cause de la linéarité, d'autre part $A = B$ donc $\det A = \det B$ donc $\det A = -\det A$ donc $\det A = 0$.

Exercice III.7 Ch3-Exercice7
Démontrer la proposition suivante : Si $A \in \mathscr{M}_{n,n}, \lambda \in K$ alors $(\det \lambda A) = \lambda^n \det A$

Solution : $\det(\lambda A) = \det(\lambda A_1 \lambda A_2 \ldots \lambda A_n) = \lambda \det(A_1 \lambda A_2 \ldots \lambda A_n) = \lambda^2 \det(A_1 A_2 \lambda A_3 \ldots \lambda A_n) = \lambda^n \det(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = \lambda^n \det(A)$

Exercice III.8 Ch3-Exercice8
Reprendre les exemples de l'exercice III.1 et illustrer les résultats du paragraphe "Déterminant et colonnes adjacentes".

Exercice III.9 Ch3-Exercice9
Soit C une matrice appartenant à $\mathscr{M}_{33}$, on note $d = \det(C)$. Exprimer à l'aide de d les déterminants suivants : $\det(C_1C_3C_2), \det(C_3C_2C_1), \det(C_2C_1C_3), \det(C_2C_3C_1), \det(C_3C_1C_2)$.

Solution : $\det(C_1C_3C_2) = \det(C_3C_2C_1) = \det(C_2C_1C_3) = -d$ (un échange).
$\det(C_2C_3C_1) = -\det(C_2C_1C_3) = d$ (2 échanges)
de même $\det(C_3C_1C_2) = d$

Exercice III.10 Ch3-Exercice10
Soient C et B deux matrices appartenant à $\mathscr{M}_{33}$. On suppose que

$C_1 = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i1} B_i, \quad C_2 = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{j2} B_j, \quad C_3 = \sum_{k=1}^{3} \gamma_{k3} B_k$

on note $d = \det B$

1. Déterminer $\det(B_1B_2C_3)$ et $\det(B_1B_3C_3)$ en fonction de d.
2. En déduire $\det(B_1C_2C_3)$ en fonction de d.
3. Calculer de façon similaire $\det(B_2C_2C_3)$ et $\det(B_3C_2C_3)$.

4. En déduire que $\det(C_1C_2C_3) = \lambda \det(B_1B_2B_3)$ où λ est un coefficient à déterminer.
5. Lorsque $B = I$, quels sont les termes de la matrice C ? Vérifier que le résultat trouvé précédemment est correct .

Solution :

1.

$$\det(B_1B_2C_3) = \sum_{k=1}^{3} \gamma_{k3} \det(B_1B_2B_k) = \gamma_{33}d,$$

$$\det(B_1B_3C_3) = \gamma_{23}\det(B_1, B_3B_2) = -\gamma_{23}d.$$

2. $\det(B_1C_2C_3) = \gamma_{22}\det(B_1B_2C_3) + \gamma_{32}\det(B_1B_3C_3) = (\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{32}\gamma_{23})d$
3. $\det(B_2C_2C_3) = (\gamma_{32}\gamma_{13} - \gamma_{12}\gamma_{33})d$, $\det(B_3C_2C_3) = (\gamma_{12}\gamma_{23} - \gamma_{22}\gamma_{13})d$
4. $\det(C_1C_2C_3) = \gamma_{11}\det(B_1C_2C_3) + \gamma_{21}\det(B_2C_2C_3) + \gamma_{31}\det(B_3C_2C_3) = \lambda d$ avec
$\lambda = \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{11}\gamma_{32}\gamma_{23} + \gamma_{21}\gamma_{32}\gamma_{13} - \gamma_{21}\gamma_{12}\gamma_{33} + \gamma_{31}\gamma_{12}\gamma_{23} - \gamma_{31}\gamma_{22}\gamma_{13}$
5. Si $B = I$, $d = 1$ on a donc $\det C = \lambda$.

   dans ce cas les termes de la matrice C sont alors les γ_{ij}, on a donc $\det C = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix}$.

   On retrouve bien $\det C = \lambda$.

Exercice III.11 Ch3-Exercice11
Soit τ une transposition, montrer que $\tau^{-1} = \tau$.

Exercice III.12 Ch3-Exercice12

1. Montrer que 3 des 6 permutations de $\mathscr{S}_3$ sont des transpositions, on notera ces transpositions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
2. On note $\sigma_0, \sigma_4, \sigma_5$ les 3 autres permutations. Montrer pour chacune d'elles qu'elle peut s'écrire comme composée de transpositions et ceci de plusieurs manières différentes : trouver à chaque fois au moins deux décompositions.
3. Quelle est la signature de chacune des permutations ?
4. Soit $A \in \mathscr{M}_{nn}$, on définit les matrices B et C par

$$B = (A_{\sigma_2(1)}, A_{\sigma_2(2)}, A_{\sigma_2(3)}),\ C = (A_{\sigma_4(1)}, A_{\sigma_4(2)}, A_{\sigma_4(3)}).$$

   Exprimer $\det B, \det C$ à l'aide de $\det A$.

Solution :

1. $\sigma_1 : (1,2,3) \mapsto (1,3,2), \sigma_2 : (1,2,3) \mapsto (3,2,1), \sigma_3 : (1,2,3) \mapsto (2,1,3)$ sont des transpositions.
2. $\sigma_0 : (1,2,3) \mapsto (1,2,3), \sigma_0 = \sigma_2 \circ \sigma_2 = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$, entre autres !
$\sigma_4 : (1,2,3) \mapsto (2,3,1), \sigma_4 = \sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \ldots$ etc.
$\sigma_5 : (1,2,3) \mapsto (3,1,2), \sigma_5 = \sigma_3 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_3 \ldots$ etc.
3. $\mathscr{E}(\sigma_1) = \mathscr{E}(\sigma_2) = \mathscr{E}(\sigma_3) = -1, \mathscr{E}(\sigma_0) = \mathscr{E}(\sigma_4) = \mathscr{E}(\sigma_5) = 1$
4. $B = (A_3A_2A_1)$, $C = (A_2A_3A_1)$
$\det B = -\det(A_1A_2A_3) = -\det A$
$\det C = -\det B = \det A$

Exercice III.13 Ch3-Exercice13

Dans le cas particulier $n = 3$, vérifier les propriétés suivantes :

1. Si τ est une transposition, $\epsilon(\tau) = -1$.
2. $\epsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma_2),\ \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathscr{S}_n$.
3. $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma),\ \forall \sigma \in \mathscr{S}_n$.
4. $\det\left(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)}\right) = \epsilon(\sigma) \det\ (A_1, \dots, A_n)$.

Solution : Reprenez la table écrite dans le TD1, les résultats de l'exercice précédent et vérifiez que :

$$\epsilon(\tau) = -1;$$

$$\epsilon(\sigma_i \circ \sigma_j) = \epsilon(\sigma_i)\epsilon(\sigma_j);$$

$$\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma);$$

$$\det\ (A_{\sigma_i(1)}, A_{\sigma_i(2)}, A_{\sigma_i(3)}) = \epsilon(\sigma_i) \det A \text{ pour } i = 2, 4$$

.

Exercice III.14 Ch3-Exercice14

Soit $A \in \mathscr{M}_{33}$, vérifier que l'on a :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \epsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(j)j} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Solution : Le déterminant de A est égal à :

$$\underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{a_{\sigma_0(1)1}a_{\sigma_0(2)2}a_{\sigma_0(3)3}} \quad \underbrace{-\,a_{11}a_{32}a_{23}}_{-a_{\sigma_1(1)1}a_{\sigma_1(2)2}a_{\sigma_1(3)3}} \quad \underbrace{+\,a_{21}a_{32}a_{13}}_{+a_{\sigma_4(1)1}\dots} \quad \underbrace{-\,a_{21}a_{12}a_{33}}_{-a_{\sigma_3(1)1}\dots} \quad \underbrace{+\,a_{31}a_{12}a_{23}}_{+a_{\sigma_5(1)1}\dots} \quad \underbrace{-\,a_{31}a_{22}a_{13}}_{-a_{\sigma_2(1)1}\dots}$$

Exercice III.15 Ch3-Exercice15

Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Solution :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -32;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 15.$$

Pour le premier déterminant on a développé suivant la 2e colonne, pour le deuxième déterminant on a développé selon la 3e ligne.

Exercice III.16 Ch3-Exercice16

1. On peut calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ en effectuant les étapes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

   Pour chacune des étapes précédentes citer la règle permettant d'obtenir l'égalité.

2. Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$.

Solution :

1. – 1e étape : $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$: c'est-à-dire , on remplace la 1e colonne par (la 1e + la 2e +la 3e).
   – 2e étape : On factorise 6 dans la 1e colonne.
   – 3e étape : $L_2 \to L_2 - L_1$: on remplace la 2e ligne par (la 2e - la 1e).
   – 4e étape : On développe suivant la 2e ligne.
   – 5e étape : On calcule le déterminant 2×2

2. – $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

   On a effectué $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ puis le développement par rapport à la 1e colonne.

   – $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1$

   On a effectué $L_4 \to L_4 - L_3, L_3 \to L_3 - L_2, L_2 \to L_2 - L_1$.
   Puis on a développé selon la 1e colonne.
   Puis on a effectué $L_3 \to L_3 - L_2, L_2 \to L_2 - L_1$.
   Puis on a développé selon la 1e colonne.

Exercice III.17 Ch3-Exercice17

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,n}$, montrer que $\det AB = \det BA$. Donner un exemple dans lequel $AB \neq BA$ et calculer les déterminants de AB et BA.

Solution : $\det AB = \det BA = \det A \det B$.

Exercice III.18 Ch3-Exercice18

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$:
{(4,0,4), (2,1,1), (3,2,2) }, { (1,1,1), (2,3,1), (0,1,-1)} ?

Solution : On a vu dans l'exercice III.1 que $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ donc la famille est libre.

Pour la deuxième famille on trouve que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ donc cette famille est liée

(on a utilisé la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Exercice III.19 Ch3-Exercice19

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base de référence, et soit $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ une famille de vecteurs de E, montrer que

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n) = 0 \Leftrightarrow \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\} \text{ est une famille liée.}$$

Solution : D'après le théorème 3.2.2, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} \text{ forment une base de } E \Longleftrightarrow \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \neq 0.$$

Donc leurs négations sont équivalentes aussi :

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} \text{ n'est pas une base de } E \Longleftrightarrow \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) = 0.$$

Or, dans un espace de dimension n, une famille de n vecteurs qui n'est pas une base est une famille liée, d'où le résultat.

Exercice III.20 Ch3-Exercice20

Les matrices $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ?

Solution : La première matrice est inversible car son déterminant vaut 4 donc il est différent de 0, la deuxième n'est pas inversible car son déterminant est nul.

Exercice III.21 Ch3-Exercice21

Utiliser le déterminant pour montrer que le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible. Si l'une des deux matrices n'est pas inversible, que peut-on dire du produit ?

Solution : Si A et B sont inversibles, alors $\det A \neq 0$ et $\det B \neq 0$ donc $\det AB \neq 0$: AB est inversible.
Si l'une des matrices n'est pas inversible son déterminant est nul, donc le produit des déterminants est nul, donc le déterminant du produit AB est nul, donc AB n'est pas inversible.

Exercice III.22 Ch3-Exercice22

Donner le déterminant de la rotation dans l'espace d'angle θ d'axe Oy.

Solution : La matrice de la rotation est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

son déterminant est égal à 1.

Exercice III.23 Ch3-Exercice23

1. Est-ce-que la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ $\{(1,3,5,1),(2,2,6,-2),(1,2,4,0)\}$ est libre ?
2. Quel est le rang de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}?$$

Solution :

1. On peut utiliser la proposition du paragraphe "Rang ". On calcule les 4 déterminants 3×3 extraits de la matrice $(X_1 X_2 X_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.
Ils sont tous nuls :
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
donc la famille n'est pas libre. Ce résultat aurait été obtenu (avec moins de calculs) en écrivant le système :
$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} \alpha_1 & +2\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ 3\alpha_1 & +2\alpha_2 & +2\alpha_3 & = 0 \\ 5\alpha_1 & +6\alpha_2 & +4\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & -2\alpha_2 & & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} \alpha_1 & +2\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & -2\alpha_2 & & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha_1 & = 2\alpha_2 \\ \alpha_3 & = -4\alpha_2 \end{array}\right.$$
2. On voit que $(X_1 X_2 X_3) = A^T$ donc ces 2 matrices ont le même rang, or le rang de X est strictement inférieur à 3 d'après la question précédente. de plus on constate immédiatement que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ donc le rang de X (donc de A) est égal à 2.

Exercice III.24 Ch3-Exercice24

Résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 3 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = -4 \\ 2x_1 & +5x_2 & +10x_3 & = -1 \end{array}\right.$$
en utilisant les formules de Cramer puis la méthode de Gauss.
Est-il possible de résoudre par les formules de Cramer le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = -2 \\ x_1 & +4x_2 & +7x_3 & = 5 \end{array}\right. ?$$
Si non, utiliser la méthode de Gauss pour le résoudre.

Solution :

– Avec les formules de Cramer on obtient :
  $\det A = 4, \triangle_1 = 8, \triangle_2 = 4, \triangle_3 = -4$, d'où $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$
  Par la méthode d'élimination de gauss décrite en TD on obtient :
$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 3 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = -4 \\ 2x_1 & +5x_2 & +10x_3 & = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 3 \\ & x_2 & +2x_3 & = -1 \\ & 2x_2 & +6x_3 & = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 3 \\ & x_2 & +2x_3 & = -1 \\ & & +2x_3 & = -2 \end{array}\right.$$
  Ce qui donne $x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = 2$

– On obtient det $A = 0$ ce qui ne permet pas d'utiliser les formules de Cramer, du moins pour le système de 3 équations (on pourrait résoudre les 2 premières par les formules de Cramer en considérant par exemple x_3 comme un paramètre au second membre, on obtiendrait x_1 et x_2 en fonction de x_3 et il faudrait vérifier si les solutions trouvées vérifient la 3e équation)
Par la méthode d'élimination de Gauss on obtient :
$$\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & =-2 \\ x_1 & +4x_2 & +7x_3 & =5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =1 \\ & -2x_2 & -4x_3 & =-4 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x_2 & = & -2x_3+2 \\ x_1 & = & x_3-3 \end{array}\right. ,$$
ce qui est plus simple !

Exercice III.25 Ch3-Exercice25

Montrer que le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est $r = 2$.

Solution : On peut montrer que les 4 matrices 3×3 extraites ne sont pas inversibles ou montrer que les 3 colonnes sont liées : on en déduit que le rang de A est inférieur strictement à 3. On voit immédiatement que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, on en déduit que le rang de A est supérieur ou égal à 2. D'où $r = 2$

Exercice III.26 Ch3-Exercice26

Quelle est la dimension de Ker A dans le cas de la matrice de l'exercice III.25

Solution : La dimension du noyau de A est égale à $3 - r = 1$

Exercice III.27 Ch3-Exercice27

Avec les notations du paragraphe "Système linéaire - notation et exemple". montrer que :

$$\hat{A}x = \sum_{j=1}^{p} x_j \hat{A}_j = A^* x^* + \sum_{j=r+1}^{p} x_j \hat{A}_j.$$

Solution : Revoir les définitions de $\hat{A}$, A^*, x^* et vérifier que $\sum_{j=1}^{p} x_j \hat{A}_j = A^* x^*$

Exercice III.28 Ch3-Exercice28

On définit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Résoudre $Ax = b$ en utilisant la résolution théorique exposée dans le paragraphe "Système linéaire inhomogène - résolution". On explicitera en particulier les matrices $\hat{A}$, A^* .

Mêmes questions avec pour second membre $b' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Solution : On résout $A^* x^* = \hat{b} - \sum_{j=r+1}^{p} x_j \hat{A}_j$, c'est-à-dire, $\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & = & 1 & -x_3 \\ x_1 & +2x_2 & = & -1 & x_3 \end{array}\right.$

On obtient

$$\left\{\begin{array}{llll} x_2 & = & 2x_3 & -2 \\ x_1 & = & -3x_3 & +3 \end{array}\right.$$

Il reste à vérifier si ces expressions vérifient les 2 dernières équations. La réponse est oui avec b, non avec b', donc le système $Ax = b'$ n'a pas de solution.

Exercice III.29 Ch3-Exercice29

Utiliser la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Solution : On voit après la première étape de la méthode de Gauss que l'on obtient 2 équations incompatibles, à savoir $-x_2 + 2x_3 = 2$ et $-x_2 + 2x_3 = 3$. Le système n'a pas de solution.

Exercice III.30 Ch3-Exercice30

Utiliser la résolution d'un système linéaire pour obtenir la première colonne de l'inverse de la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Comment obtiendrait-on la 2e puis la 3e colonne, est-il nécessaire de refaire tous les calculs ?

Solution :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & +3x_2 & +7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & +3x_3 & = & -2 \\ & +2x_2 & +5x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & +3x_3 & = & -2 \\ & & -x_3 & = & 5 \end{array}\right. .$$

.On a donc : $x_1 = -1, x_2 = 13, x_3 = -5$

Pour obtenir la 2e colonne il suffit de changer le second membre, on prend I_2, pour la 3e on prend I_3, tous les calculs ne sont pas à refaire, les coefficients de x_1, x_2, x_3 au cours des étapes restent les mêmes.

Exercice III.31 Ch3-Exercice31

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ en utilisant les co-facteurs.

Solution : On obtient après calcul : $A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -11 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
