

Exercices du chapitre 3 avec corrigé succinct

Exercice III.1 Ch3-Exercice 1 : calculs de déterminants par la définition

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3a & c \\ 3b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 1 & 2\lambda \\ 4 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

Solution :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} &= ad - bc; \\ \begin{vmatrix} 3a & c \\ 3b & d \end{vmatrix} &= 3(ad - bc); \\ \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} &= 4 \times 3 \times 5; \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 0; \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 1 & 2\lambda \\ 4 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} &= 4\lambda. \end{aligned}$$

Exercice III.2 Ch3-Exercice 2 : det : matrice triangulaire inf., diagonale, conjuguée

- Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ triangulaire inférieure ($a_{ij} = 0$ pour $i < j$), en utilisant la définition du déterminant montrer que $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.
— En déduire que :
— pour les matrices diagonales ($a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$) on a aussi $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$,
— la matrice identité a pour déterminant $\det I = 1$.
- Si $\bar{A}$ est la matrice dont les termes sont les conjugués de ceux de A , alors $\det \bar{A} = \overline{\det A}$.

Solution : Dans l'exercice précédent on a vu que le déterminant de $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ était égal $4 * 3 * 5$. Le résultat

se généralise très facilement à une matrice triangulaire inférieure quelconque (on peut faire un raisonnement par récurrence). Évidemment on en déduit les résultats sur les matrices diagonales et sur la matrice identité. Il est évident en utilisant la définition que $\det \bar{A} = \overline{\det A}$. On utilise en particulier les propriétés bien connues sur les complexes conjugués à savoir, le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, le conjugué d'un produit est le produit des conjugués.

Exercice III.3 Ch3-Exercice 3 : déterminant d'une base

Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ sont les vecteurs de la base $\mathcal{E}$ de référence, montrer que $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1$.

Solution : $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = \det I = 1$

Exercice III.4 Ch3-Exercice 4 : déterminant de polynômes

1. L'espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est muni de la base canonique (p_0, p_1, p_2) considérée comme base de référence. On définit les polynômes p, q, r par

$$p(t) = 3t^2 + 6t + 4, \quad q(t) = t^2 + 2t - 1, \quad r(t) = -t^2 + 4t + 2,$$

calculer $\det(p, q, r)$.

2. On définit $q_1(t) = 2t - 1$. On choisit maintenant comme base de référence la base (p_0, q_1, p_2) , calculer $\det(p, q, r)$.

Solution :

- 1.

$$\det(p, q, r) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -42.$$

2. Après identification, on obtient les composantes de p, q, r sur la base (p_0, q_1, p_2) ,

$$p = 3p_2 + 3q_1 + 7p_0, \quad q = p_2 + q_1, \quad r = -p_2 + 2q_1 + 4p_0,$$

et il vient

$$\det(p, q, r) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -21.$$

Exercice III.5 Ch3-Exercice 5 : det multilinéaire : additivité par rapport à une colonne

À partir de la définition du déterminant par récurrence, démontrer l'égalité suivante :

$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, B + C, A_{k+1}, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_{k-1}, C, A_{k+1}, \dots, A_n).$$

Solution : La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de la matrice :

- pour $n = 1$, c'est évident.
- Supposons la propriété vraie à l'ordre $n - 1$.
Soit $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_n, B, C \in \mathcal{M}_{n,1}$. On note

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= (A_1, \dots, A_{k-1}, B + C, A_{k+1}, \dots, A_n), \\ \tilde{B} &= (A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n), \\ \tilde{C} &= (A_1, \dots, A_{k-1}, C, A_{k+1}, \dots, A_n). \end{aligned}$$

La définition du déterminant donne :

$$\det \tilde{A} = \sum_{j \neq k} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{A}_{|1,j|} + (-1)^{1+k} (b_1 + c_1) \det \tilde{A}_{|1,k|}.$$

En effet $\tilde{a}_{1j} = a_{1j}$ pour $j \neq k$ et $\tilde{a}_{1k} = b_1 + c_1$.

Pour $j \neq k$, la matrice $\tilde{A}_{|1,j|} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}$ donc, par hypothèse de récurrence, on a

$$\det \tilde{A}_{|1,j|} = \det \tilde{B}_{|1,j|} + \det \tilde{C}_{|1,j|}.$$

De plus

$$\begin{aligned} \det \tilde{B} &= \sum_{j \neq k} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{B}_{|1,j|} + (-1)^{1+k} b_1 \det \tilde{B}_{|1,k|}, \\ \det \tilde{C} &= \sum_{j \neq k} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{C}_{|1,j|} + (-1)^{1+k} c_1 \det \tilde{C}_{|1,k|}. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer que les matrices $\tilde{A}_{|1,k|}$, $\tilde{B}_{|1,k|}$, $\tilde{C}_{|1,k|}$ sont identiques, donc elles ont le même déterminant. On obtient alors le résultat :

$$\det \tilde{A} = \det \tilde{B} + \det \tilde{C}.$$

Exercice III.6 Ch3-Exercice 6 : déterminant nul si colonne nulle

Montrer que si A a une colonne nulle, alors $\det A = 0$.

Solution : Si la colonne A_k de A est nulle, si on note B la matrice dont les colonnes sont $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, -A_k, A_{k+1}, \dots, A_n$, on a $\det B = -\det A$ à cause de la linéarité, d'autre part $A = B$ donc $\det A = \det B$ donc $\det A = -\det A$ donc $\det A = 0$.

Exercice III.7 Ch3-Exercice 7 : déterminant de (λA)

Démontrer la proposition suivante : Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(\det \lambda A) = \lambda^n \det A$.

Solution : $\det(\lambda A) = \det(\lambda A_1 \lambda A_2 \dots \lambda A_n) = \lambda \det(A_1 \lambda A_2 \dots \lambda A_n) = \lambda^2 \det(A_1 A_2 \lambda A_3 \dots \lambda A_n) = \lambda^n \det(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = \lambda^n \det(A)$

Exercice III.8 Ch3-Exercice 8 : déterminants avec colonnes adjacentes

Reprendre les exemples de l'Exercice A.1.1 et illustrer les résultats du paragraphe "Déterminant et colonnes adjacentes".

Exercice III.9 Ch3-Exercice 9 : déterminants avec permutations de colonnes

Soit C une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{3,3}$, on note $d = \det(C)$. Exprimer à l'aide de d les déterminants suivants : $\det(C_1 C_3 C_2)$, $\det(C_3 C_2 C_1)$, $\det(C_2 C_1 C_3)$, $\det(C_2 C_3 C_1)$ et $\det(C_3 C_1 C_2)$.

Solution : $\det(C_1 C_3 C_2) = \det(C_3 C_2 C_1) = \det(C_2 C_1 C_3) = -d$ (un échange).
 $\det(C_2 C_3 C_1) = -\det(C_2 C_1 C_3) = d$ (2 échanges).
 De même $\det(C_3 C_1 C_2) = d$.

Exercice III.10 Ch3-Exercice 10 : déterminant avec combinaisons de colonnes

Soient C et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_{3,3}$. On se donne des scalaires $(\gamma_{ij})_{i,j=1,2,3}$, tels que

$$C_1 = \sum_{i=1}^3 \gamma_{i1} B_i, \quad C_2 = \sum_{j=1}^3 \gamma_{j2} B_j, \quad C_3 = \sum_{k=1}^3 \gamma_{k3} B_k.$$

On note $d = \det B$

1. Déterminer $\det(B_1 B_2 C_3)$ et $\det(B_1 B_3 C_3)$ en fonction de d .

2. En déduire $\det(B_1 C_2 C_3)$ en fonction de d .
3. Calculer de façon similaire $\det(B_2 C_2 C_3)$ et $\det(B_3 C_2 C_3)$.
4. En déduire que $\det(C_1 C_2 C_3) = \lambda \det(B_1 B_2 B_3)$ où λ est un coefficient à déterminer.
5. Lorsque $B = I$, quels sont les termes de la matrice C ? Vérifier que le résultat trouvé précédemment est correct.

Solution :

1. $\det(B_1 B_2 C_3) = \sum_{k=1}^3 \gamma_{k3} \det(B_1 B_2 B_k) = \gamma_{33} d$,
 $\det(B_1 B_3 C_3) = \gamma_{23} \det(B_1, B_3 B_2) = -\gamma_{23} d$.
2. $\det(B_1 C_2 C_3) = \gamma_{22} \det(B_1 B_2 C_3) + \gamma_{32} \det(B_1 B_3 C_3) = (\gamma_{22} \gamma_{33} - \gamma_{32} \gamma_{23}) d$.
3. $\det(B_2 C_2 C_3) = (\gamma_{32} \gamma_{13} - \gamma_{12} \gamma_{33}) d$, $\det(B_3 C_2 C_3) = (\gamma_{12} \gamma_{23} - \gamma_{22} \gamma_{13}) d$.
4. $\det(C_1 C_2 C_3) = \gamma_{11} \det(B_1 C_2 C_3) + \gamma_{21} \det(B_2 C_2 C_3) + \gamma_{31} \det(B_3 C_2 C_3) = \lambda d$ avec
 $\lambda = \gamma_{11} \gamma_{22} \gamma_{33} - \gamma_{11} \gamma_{32} \gamma_{23} + \gamma_{21} \gamma_{32} \gamma_{13} - \gamma_{21} \gamma_{12} \gamma_{33} + \gamma_{31} \gamma_{12} \gamma_{23} - \gamma_{31} \gamma_{22} \gamma_{13}$.
5. Si $B = I$, $d = 1$ on a donc $\det C = \lambda$.

Dans ce cas les termes de la matrice C sont alors les γ_{ij} , on a donc $\det C = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix}$.

On retrouve bien $\det C = \lambda$.

Exercice III.11 Ch3-Exercice 11 : transposition = involution

Soit τ une transposition sur $\mathcal{S}_n$. Montrer que $\tau^{-1} = \tau$.

(On dit alors que τ est une involution.)

Exercice III.12 Ch3-Exercice 12 : permutation = composée de transpositions

1. Montrer que 3 des 6 permutations de $\mathcal{S}_3$ sont des transpositions, on notera ces transpositions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
2. On note $\sigma_0, \sigma_4, \sigma_5$ les 3 autres permutations. Pour chacune d'elles, montrer qu'elle peut s'écrire comme composée de transpositions et ceci de plusieurs manières différentes : trouver à chaque fois au moins deux décompositions.
3. Quelle est la signature de chacune des permutations?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, on définit les matrices B et C par

$$B = (A_{\sigma_2(1)}, A_{\sigma_2(2)}, A_{\sigma_2(3)}), \quad C = (A_{\sigma_4(1)}, A_{\sigma_4(2)}, A_{\sigma_4(3)}).$$

Exprimer $\det B$, $\det C$ à l'aide de $\det A$.

Solution :

1. $\sigma_1 : (1, 2, 3) \mapsto (1, 3, 2)$, $\sigma_2 : (1, 2, 3) \mapsto (3, 2, 1)$, $\sigma_3 : (1, 2, 3) \mapsto (2, 1, 3)$ sont des transpositions.
2. $\sigma_0 : (1, 2, 3) \mapsto (1, 2, 3)$, $\sigma_0 = \sigma_2 \circ \sigma_2 = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$, entre autres!
 $\sigma_4 : (1, 2, 3) \mapsto (2, 3, 1)$, $\sigma_4 = \sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \dots$,
 $\sigma_5 : (1, 2, 3) \mapsto (3, 1, 2)$, $\sigma_5 = \sigma_3 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_3 \dots$
3. $\mathcal{E}(\sigma_1) = \mathcal{E}(\sigma_2) = \mathcal{E}(\sigma_3) = -1$, $\mathcal{E}(\sigma_0) = \mathcal{E}(\sigma_4) = \mathcal{E}(\sigma_5) = 1$
4. $B = (A_3 A_2 A_1)$, $C = (A_2 A_3 A_1)$, et $\det B = -\det(A_1 A_2 A_3) = -\det A$, $\det C = -\det B = \det A$.

Exercice III.13 Ch3-Exercice 13 : signature de permutations sur $\mathcal{S}_3$

Dans le cas particulier $n = 3$, vérifier les propriétés suivantes :

1. Si τ est une transposition, $\epsilon(\tau) = -1$.
2. $\epsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma_2)$, $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_n$.
3. $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$.
4. $\det(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) \det(A_1, \dots, A_n)$.

Solution : Reprenez la table écrite dans le TD1, les résultats de l'exercice précédent et vérifiez que :

$$\begin{aligned}\epsilon(\tau) &= -1; \\ \epsilon(\sigma_i \circ \sigma_j) &= \epsilon(\sigma_i)\epsilon(\sigma_j); \\ \epsilon(\sigma^{-1}) &= \epsilon(\sigma); \\ \det(A_{\sigma_i(1)}, A_{\sigma_i(2)}, A_{\sigma_i(3)}) &= \epsilon(\sigma_i) \det A \text{ pour } i = 2, 4.\end{aligned}$$

Exercice III.14 Ch3-Exercice 14 : déterminant par les permutations ($n = 3$)

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,3}$, vérifier que l'on a :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(j)j} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Solution : Le déterminant de A est égal à :

$$\begin{aligned}& \underbrace{a_{11} a_{22} a_{33}}_{a_{\sigma_0(1)1} a_{\sigma_0(2)2} a_{\sigma_0(3)3}} - \underbrace{a_{11} a_{32} a_{23}}_{-a_{\sigma_1(1)1} a_{\sigma_1(2)2} a_{\sigma_1(3)3}} + \underbrace{a_{21} a_{32} a_{13}}_{+a_{\sigma_4(1)1} \dots} - \underbrace{a_{21} a_{12} a_{33}}_{-a_{\sigma_3(1)1} \dots} + \underbrace{a_{31} a_{12} a_{23}}_{+a_{\sigma_5(1)1} \dots} - \underbrace{a_{31} a_{22} a_{13}}_{-a_{\sigma_2(1)1} \dots}\end{aligned}$$

Exercice III.15 Ch3-Exercice 15 : calculs pratiques de déterminants 3×3

Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$

Solution :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -32; \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 15.\end{aligned}$$

Pour le premier déterminant on a développé suivant la 2e colonne, pour le deuxième déterminant on a développé selon la 3e ligne.

Exercice III.16 Ch3-Exercice 16 : calculs pratiques de déterminants

1. On peut calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ en effectuant les étapes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

Pour chacune des étapes précédentes, citer la règle permettant d'obtenir l'égalité.

2. Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}.$

Solution :

1. — 1^e étape : $C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3$: on remplace la 1^e colonne par somme : (la 1^e + la 2^e + la 3^e).
- 2^e étape : on factorise 6 dans la 1^e colonne.
- 3^e étape : $L_2 \rightarrow L_2 - L_1$: on remplace la 2^e ligne par différence : (la 2^e - la 1^e).
- 4^e étape : on développe suivant la 2^e ligne.
- 5^e étape : on calcule le déterminant 2×2 .

2. — $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3.$

On a effectué $C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3$ puis le développement par rapport à la 1^e colonne.

— $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1.$

On a effectué $L_4 \rightarrow L_4 - L_3, L_3 \rightarrow L_3 - L_2, L_2 \rightarrow L_2 - L_1$.

Puis on a développé selon la 1^e colonne.

Puis on a effectué $L_3 \rightarrow L_3 - L_2, L_2 \rightarrow L_2 - L_1$.

Puis on a développé selon la 1^e colonne.

Exercice III.17 Ch3-Exercice 17 : déterminant de AB et de BA

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,n}$, montrer que $\det(AB) = \det(BA)$. Donner un exemple dans lequel $AB \neq BA$ et calculer les déterminants de AB et BA .

Solution : $\det AB = \det BA = \det A \det B$.

Exercice III.18 Ch3-Exercice 18 : bases par le déterminant

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$:

$((4, 0, 4), (2, 1, 1), (3, 2, 2)) ? ((1, 1, 1), (2, 3, 1), (0, 1, -1)) ?$

Solution : On a vu dans l'Exercice A.1.1 que $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, donc la famille est libre.

Pour la deuxième famille, on trouve que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, donc cette famille est liée.

(On a utilisé la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Exercice III.19 Ch3-Exercice 19 : déterminant nul équivalent à famille liée

Soit E un espace vectoriel de dimension n , muni d'une base de référence, et soit $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ une famille de vecteurs de E , montrer que

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = 0 \iff (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \text{ est une famille liée.}$$

Solution : D'après le théorème 3.2.2, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \text{ est une base de } E \iff \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \neq 0.$$

Donc leurs négations sont équivalentes aussi :

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \text{ n'est pas une base de } E \iff \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = 0.$$

Or, dans un espace de dimension n , une famille de n vecteurs qui n'est pas une base est une famille liée, d'où le résultat.

Exercice III.20 Ch3-Exercice 20 : inversibilité par le déterminant

Les matrices $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles?

Solution : La première matrice est inversible car son déterminant vaut 4 donc il est différent de 0, la deuxième n'est pas inversible car son déterminant est nul.

Exercice III.21 Ch3-Exercice 21 : inversibilité du produit de 2 matrices inversibles

Utiliser le déterminant pour montrer que le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible. Si l'une des deux matrices n'est pas inversible, que peut-on dire du produit?

Solution : Si A et B sont inversibles, alors $\det A \neq 0$ et $\det B \neq 0$ donc $\det AB \neq 0$: AB est inversible.

Si l'une des matrices n'est pas inversible son déterminant est nul, donc le produit des déterminants est nul, donc le déterminant du produit AB est nul, donc AB n'est pas inversible.

Exercice III.22 Ch3-Exercice 22 : déterminant de la rotation dans le plan

Donner le déterminant de la rotation dans l'espace d'angle θ d'axe Oy .

Solution : La matrice de la rotation est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

son déterminant est égal à 1.

Exercice III.23 Ch3-Exercice 23 : liberté d'une famille, rang d'une matrice

1. Est-ce-que la famille $((1, 3, 5, 1), (2, 2, 6, -2), (1, 2, 4, 0))$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est libre?
2. Quel est le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}?$$

Solution :

1. On peut utiliser la proposition du paragraphe "Rang". On calcule les 4 déterminants 3×3 extraits de la

$$\text{matrice } (X_1 X_2 X_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ils sont tous nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

donc la famille n'est pas libre. Ce résultat aurait été obtenu (avec moins de calculs) en écrivant le système :

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 5\alpha_1 + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_2 \\ \alpha_3 = -4\alpha_2 \end{cases}$$

2. On voit que $(X_1 X_2 X_3) = A^T$ donc ces 2 matrices ont le même rang, or le rang de X est strictement inférieur à 3 d'après la question précédente. de plus on constate immédiatement que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ donc le rang de X (donc de A) est égal à 2.

Exercice III.24 Ch3-Exercice 24 : résolution de systèmes carrés par Cramer et Gauss

Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 = -1 \end{cases}$$

en utilisant les formules de Cramer, puis la méthode de Gauss.

Est-il possible de résoudre par les formules de Cramer le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \quad ? \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases}$$

Si non, utiliser la méthode de Gauss pour le résoudre.

Solution :

— Avec les formules de Cramer on obtient :

$$\det A = 4, \Delta_1 = 8, \Delta_2 = 4, \Delta_3 = -4, \text{ d'où } x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$$

Par la méthode d'élimination de gauss décrite en TD on obtient :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 + 6x_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_3 = -2 \end{cases}$$

Cela donne $x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = 2$.

— On obtient $\det A = 0$, dont on ne peut pas d'utiliser les formules de Cramer, du moins pour le système de 3 équations (on pourrait résoudre les 2 premières par les formules de Cramer en considérant par exemple x_3 comme un paramètre au second membre, on obtiendrait x_1 et x_2 en fonction de x_3 et il faudrait vérifier si les solutions trouvées vérifient la 3^e équation).

Par la méthode d'élimination de Gauss, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_2 - 4x_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_3 + 2 \\ x_1 = x_3 - 3 \end{cases}.$$

C'est plus simple!

Exercice III.25 Ch3-Exercice 25 : rang d'une matrice 4×3

Montrer que le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est $r = 2$.

Solution : On peut montrer que les 4 matrices 3×3 extraites ne sont pas inversibles ou montrer que les 3 colonnes sont liées : on en déduit que le rang de A est inférieur strictement à 3. On voit immédiatement que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, on en déduit que le rang de A est supérieur ou égal à 2. D'où $r = 2$

Exercice III.26 Ch3-Exercice 26 : dimension du noyau d'une matrice 4×3

Quelle est la dimension de $\text{Ker } A$ dans le cas de la matrice de l'Exercice A.1.25

Solution : La dimension du noyau de A est égale à $3 - r = 1$

Exercice III.27 Ch3-Exercice 27 : système rectangulaire homogène : lien entre $\hat{A}$ et A^*

Avec les notations du paragraphe "Système linéaire - notation et exemple", montrer que :

$$\hat{A}x = \sum_{j=1}^p x_j \hat{A}_j = A^* x^* + \sum_{j=r+1}^p x_j \hat{A}_j.$$

Solution : Revoir les définitions de $\hat{A}$, A^* , x^* et vérifier que $\sum_{j=1}^p x_j \hat{A}_j = A^* x^*$.

Exercice III.28 Ch3-Exercice 28 : résolution d'un système rectangulaire 4×3

On définit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Résoudre $Ax = b$ en utilisant la résolution théorique exposée dans le paragraphe "Système linéaire inhomogène - résolution". On explicitera en particulier les matrices $\hat{A}$, A^* .

Mêmes questions avec pour second membre $b' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Solution : On résout $A^* x^* = \hat{b} - \sum_{j=r+1}^p x_j \hat{A}_j$, c'est-à-dire, $\begin{cases} x_1 & +x_2 & = & 1 & -x_3 \\ x_1 & +2x_2 & = & -1 & x_3 \end{cases}$ On obtient

$$\begin{cases} x_2 & = & 2x_3 & -2 \\ x_1 & = & -3x_3 & +3 \end{cases}$$

Il reste à vérifier si ces expressions vérifient les 2 dernières équations. La réponse est oui avec b , non avec b' , donc le système $Ax = b'$ n'a pas de solution.

Exercice III.29 Ch3-Exercice 29 : résolution par Gauss d'un système 4×3

Utiliser la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Solution : On voit après la première étape de la méthode de Gauss que l'on obtient 2 équations incompatibles, à savoir $-x_2 + 2x_3 = 2$ et $-x_2 + 2x_3 = 3$. Le système n'a pas de solution.

Exercice III.30 Ch3-Exercice 30 : inverse par résolution de système par Gauss

Utiliser la résolution d'un système linéaire pour obtenir la première colonne de l'inverse de la matrice A définie

par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Comment obtiendrait-on la 2^e puis la 3^e colonne, est-il nécessaire de refaire tous les calculs?

Solution :

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & +3x_2 & +7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & +3x_3 & = & -2 \\ & +2x_2 & +5x_3 & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & +3x_3 & = & -2 \\ & & -x_3 & = & 5 \end{cases}.$$

On a donc : $x_1 = -1, x_2 = 13, x_3 = -5$

Pour obtenir la 2^e colonne il suffit de changer le second membre : on prend I_2 , et pour la 3^e on prend I_3 . Tous les calculs ne sont pas à refaire, les coefficients de x_1, x_2, x_3 au cours des étapes restent les mêmes.

Exercice III.31 Ch3-Exercice 31 : inverse par Cramer (transposée de la co-matrice)

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ en utilisant les co-facteurs.

Solution : On obtient après calcul : $A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -11 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$
