MT23-Algèbre linéaire

Chapitre 4 : Valeurs propres - Vecteurs propres

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC

juillet 2014

▽

Chapitre 4

Valeurs propres - Vecteurs propres

4.1 Vecteurs propres - Valeurs propres

4.1.1 Valeur et vecteur propres d'un endomorphisme

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2

Exemples :
Exemple B.1.1

Soit E un espace vectoriel sur K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie.

Soit u un endomorphisme de E.

Dans ce chapitre, on va chercher des bases de E pour lesquelles la matrice associée à u est la plus simple possible (diagonale, triangulaire). On parlera alors de diagonalisation et trigonalisation. La notion de vecteur propre permettra d'atteindre ce but.

Définition 4.1.1. *$\lambda \in K$ est une* **valeur propre** *de u s'il existe un vecteur $\vec{y} \in E$* **non nul** *tel que*

$$u(\vec{y}) = \lambda \vec{y}. \tag{4.1.1}$$

$\vec{y}$ est appelé un **vecteur propre** *de u associé à la valeur propre λ.*

Il est fondamental de préciser "$\vec{y}$ non nul". En effet quand $\vec{y} = \vec{0}$, on a $u(\vec{y}) = \vec{0}$. De plus, pour tout $\lambda \in K$, $\lambda \vec{y} = \vec{0}$ donc $u(\vec{y}) = \lambda \vec{y} (= \vec{0})$. Donc tout scalaire de K serait valeur propre de u.

Exemple : Soit $E = F_1 \oplus F_2$ où F_1 et F_2 sont différents de $\{\vec{0}\}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On définit l'endomorphisme p projection sur F_1 parallèlement à F_2, alors

$$\forall \vec{x}_1 \in F_1,\ p(\vec{x}_1) = \vec{x}_1,\ \ \forall \vec{x}_2 \in F_2\ p(\vec{x}_2) = \vec{0}.$$

On a donc

- 1 est valeur propre de p et tout vecteur non nul de F_1 est un vecteur propre associé à cette valeur propre ;
- 0 est valeur propre de p et tout vecteur non nul de F_2 est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

4.1.2 Valeur et vecteur propres d'une matrice

Exercices :
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4

Exemples :
Exemple B.1.2

Soit A une matrice carrée.

Définition 4.1.2. *On dit que $\lambda \in K$ est une* **valeur propre** *de $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ s'il existe un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, $Y \neq 0$ tel que*

$$AY = \lambda Y. \tag{4.1.2}$$

On dit que Y est un **vecteur propre** *associé à la valeur propre λ et que (λ, Y) est un couple propre de A.*

Montrer en exercice que si Y est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, si $\alpha \in K, \alpha \neq 0$, alors αY est également vecteur propre de A associé à la valeur propre λ : les vecteurs propres ne sont pas uniques.

Exemple : $K = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche les valeurs propres λ et les vecteurs propres $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La condition (4.1.2) s'écrit $y_1 = \lambda y_1,\ y_2 = \lambda y_2,\ 0 = \lambda y_3$.

On a donc deux familles de couples propres

– $\lambda_1 = 1$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, où α et β sont des réels quelconques,

– $\lambda_2 = 0$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$, où γ est un réel quelconque.

Pour que Y_1 et Y_2 soient vecteurs propres, donc non nuls, il faut de plus $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ et $\gamma \neq 0$.

On peut montrer en exercice que les résultats constatés sur l'exemple précédent se généralisent :

– Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses termes diagonaux.

– A non inversible $\Longleftrightarrow$ 0 est valeur propre de A.

Depuis le début du cours $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Si les termes de A sont réels, puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on peut considérer $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et chercher alors les valeurs et vecteurs propres dans $\mathbb{R}$ ou considérer $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et chercher alors les valeurs et vecteurs propres dans $\mathbb{C}$. Lorsque l'on ne précise pas, si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on étudiera les valeurs et vecteurs propres réels de A.

4.1.3 Lien entre les valeurs propres d'une matrice et celles d'un endomorphisme

On vient de définir de façon indépendante les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E,E)$ puis les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice A.

Si A est une matrice associée à l'endomorphisme u, y a-t-il une relation entre les valeurs propres et vecteurs propres de l'une et les valeurs propres et vecteurs propres de l'autre ?

Proposition 4.1.1. *E est muni d'une base $\mathcal{E}$, $u \in \mathcal{L}(E,E)$ et $(\lambda, \vec{y})$ est un couple propre de u : $u(\vec{y}) = \lambda\vec{y}$ et $\vec{y} \neq \vec{0}$,*
- *si A est la matrice associée à u quand on munit E de la base $\mathcal{E}$,*
- *si Y est le vecteur colonne contenant les composantes de $\vec{y}$ dans la base $\mathcal{E}$,*

alors on a : $AY = \lambda Y$ et $Y \neq 0$. Donc (λ, Y) est un couple propre de A.

Démonstration – AY est le vecteur colonne contenant les composantes de $u(\vec{y})$ dans la base $\mathcal{E}$, λY est le vecteur colonne contenant les composantes de $\lambda\vec{y}$ dans la base $\mathcal{E}$. On a donc $AY = \lambda Y$. De plus $\vec{y} \neq \vec{0}$ donc Y est un vecteur colonne non nul.

Exemple :
- Si E est un espace vectoriel muni d'une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
- si π est le plan vectoriel engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$,
- si D est la droite vectorielle engendrée par $(\vec{e}_3)$,
- si u est la projection sur π parallèlement à D,

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

alors la matrice de u est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a calculé les valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice dans le paragraphe Valeur et vecteur propres d'une matrice. On a trouvé

$$\lambda_1 = 1, \; Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \; \lambda_2 = 0, \; Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

D'autre part, comme on l'a vu dans l'exercice A.1.2, les vecteurs du plan sont des vecteurs propres de u associés à la valeur propre 1 et les vecteurs de la droite sont des vecteurs propres de u associés à la valeur propre 0. On retrouve bien les mêmes valeurs propres et la correspondance entre les vecteurs propres de A et u :

– à Y_1 correspond $\vec{y}_1 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$; $\vec{y}_1$ est bien un vecteur du plan π,
– à Y_2 correspond $\vec{y}_2 = \gamma\vec{e}_3$; $\vec{y}_2$ est bien un vecteur de la droite D.

Lien entre les valeurs propres d'une matrice et celles d'un endomorphisme

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.1.4 Polynôme caractéristique

Exercices :
Exercice A.1.5

Cours :
Valeur et vecteur propres d'une matrice

On a vu dans l'exemple B.1.2 que le calcul des valeurs propres se fait en cherchant les valeurs de λ qui annulent le déterminant de la matrice $A - \lambda I$. D'une façon plus générale, on peut définir :

Définition 4.1.3. *On appelle* **polynôme caractéristique** *de A le polynôme*

$$\Pi_A(s) = \det\,(sI - A).$$

Le polynôme caractéristique de A est de degré n et, plus précisement, il est de la forme :

$$\Pi_A(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n.$$

En effet, $sI - A$ est la matrice

$$sI - A = \begin{pmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1i} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \ldots & -a_{2i} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots & s - a_{ii} & \ldots & -a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & -a_{ni} & \ldots & s - a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et donc il est clair que le terme de plus haut degré du déterminant de $sI - A$ est s^n. Par ailleurs

$$\alpha_n = \Pi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A). \tag{4.1.3}$$

Le calcul des valeurs propres se fait à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 4.1.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit valeur propre de A est qu'elle soit racine du polynôme caractéristique, c'est-à-dire :*

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{4.1.4}$$

Démonstration – C'est immédiat. En effet, si l'on reprend la définition 4.1.2 on a :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ est valeur propre de } A &\iff \exists Y \neq 0 \mid (\lambda I - A)Y = 0 \iff \operatorname{Ker}(\lambda I - A) \neq 0\\ &\iff \lambda I - A \text{ n'est pas inversible} \iff \det(\lambda I - A) = 0.\end{aligned}$$

Il suffit de reprendre les propriétés d'une matrice carrée vues dans les chapitres précédents.

Définition 4.1.4. *On dit que λ est une valeur propre de A de* **multiplicité** *r si λ est racine de multiplicité r du polynôme caractéristique Π_A.*

Lorsque $r = 1$, on dit que la valeur propre est simple, lorsque $r = 2$, on dit que la valeur propre est double, lorsque $r = 3$, on dit que la valeur propre est triple.

Pratiquement :

Pour déterminer les valeurs propres d'une matrice, on calcule le polynôme caractéristique

$$\Pi_A(s) = \det(sI - A).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ses racines λ_i sont les valeurs propres de la matrice. Il est équivalent de chercher les racines du polynôme $\det(A - sI)$. Pourquoi ?

La recherche des vecteurs propres se fait en résolvant alors le système $AY_i = \lambda_i Y_i$:

Exemple : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

alors

$$sI - A = \begin{pmatrix} s-5 & -2 \\ -2 & s-2 \end{pmatrix}$$

donc

$\pi_A(s) = \det(sI - A) = (s-5)(s-2) - 4 = s^2 - 7s + 6 = (s-1)(s-6).$

On obtient donc 2 valeurs propres simples réelles $\lambda = 1$ et $\lambda = 6$, on détermine les vecteurs propres associés :

- $\lambda = 1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} (A - \lambda I)Y = 0 \\ Y \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_2 = -2y_1 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \alpha \in \mathbb{R}^* \end{array} \right.$$

- $\lambda = 6$,

$$\left\{ \begin{array}{l} (A - \lambda I)Y = 0 \\ Y \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 - 4y_2 = 0 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 2y_2 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \beta \in \mathbb{R}^*. \end{array} \right.$$

Polynôme caractéristique

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On constate sur cet exemple toutes les propriétés qui ont été énoncées : π_A est un polynôme de degré 2, il existe toujours une infinité de vecteurs propres associés à une valeur propre donnée .

Il est IMPOSSIBLE que le calcul de vecteurs propres conduise à la solution unique $y_1 = y_2 = 0$. Si λ est une valeur propre de A, et si les calculs sont corrects, alors on trouve TOUJOURS des vecteurs non nuls solutions de $AY = \lambda Y$.

4.1.5 Valeurs propres et matrices particulières

Exercices :
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8

Proposition 4.1.3. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de A.*

Démontrer cette propriété en exercice.

Proposition 4.1.4.

1. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, alors :*
   λ valeur propre de $A \iff \bar{\lambda}$ valeur propre de $\bar{A}$ (avec la même multiplicité).
2. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, alors :*
   λ valeur propre de $A \iff \bar{\lambda}$ valeur propre de A (avec la même multiplicité).

Démontrer cette propriété en exercice.

Proposition 4.1.5. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors A et A^T ont les mêmes polynômes caractéristiques et donc elles ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.*

Démonstration – On a vu dans le chapitre sur les déterminants que, pour toute matrice B, $\det B = \det B^T$, on a donc

$$\det(sI - A) = \det(sI - A)^T = \det(sI - A^T).$$

Les deux matrices A et A^T ont le même polynôme caractéristique, elles ont donc les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

4.1.6 Valeurs propres et matrices semblables

Exercices :
Exercice A.1.9

On peut commencer par traiter l'exercice avant de voir sa généralisation.

Proposition 4.1.6. *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.*

Démonstration – Si A et B sont des matrices semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. Or

$$sI - B = sI - P^{-1}AP = sP^{-1}P - P^{-1}AP = P^{-1}(sI - A)P$$

et donc

$$\begin{aligned} \det(sI - B) &= \det(P^{-1}(sI - A)P) = \det P^{-1} \det(sI - A) \det(P) \\ &= \frac{1}{\det P} \det(sI - A) \det P = \det(sI - A). \end{aligned}$$

Donc $\Pi_A = \Pi_B$.

Attention ! Si A et B sont semblables, elles ont les mêmes valeurs propres mais elles n'ont pas les mêmes vecteurs propres.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En effet, si (λ, Y) est un couple propre de A, alors

$$AY = \lambda Y \tag{4.1.5}$$

or, $A = PBP^{-1}$, donc

$$PBP^{-1}Y = \lambda Y. \tag{4.1.6}$$

On multiplie (4.1.6) à gauche par P^{-1}, et on obtient

$$(P^{-1})PBP^{-1}Y = (P^{-1})\lambda Y \Leftrightarrow BP^{-1}Y = \lambda P^{-1}Y. \tag{4.1.7}$$

Si on pose $Z = P^{-1}Y$, on a $BZ = \lambda Z$.

De plus, $Y \neq 0$ et P^{-1} inversible donc $\operatorname{Ker} P^{-1} = \{0\}$. Donc $Y \notin \operatorname{Ker} P^{-1}$ et $Z \neq 0$.

Donc Z est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ (ceci démontre à nouveau que λ est valeur propre de B).

4.2 Matrices à coefficients complexes

4.2.1 Existence et multiplicité des valeurs propres

Exercices :
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11

Dans ce paragraphe, $K = \mathbb{C}$. On étudie le cas le plus général des matrices à coefficients complexes.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, donc les matrices à coefficients réels sont des matrices à coefficients complexes. Pour ces matrices, on étudiera les valeurs propres et vecteurs propres complexes car, comme on l'a vu, les valeurs propres et vecteurs propres de ces matrices ne sont pas toujours réels (revoir l'exemple B.1.2 de la rotation).

Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique de A. Puisque $K = \mathbb{C}$, l'existence et le nombre de valeurs propres d'une matrice est une conséquence du théorème de d'Alembert :

Théorème de d'Alembert - *Un polynôme de degré n à coefficients réels ou complexes admet n racines dans $\mathbb{C}$, chacune de ces racines étant comptée avec sa multiplicité.*

Le polynôme $\Pi_A(s)$ peut donc s'écrire sous la forme

$$\Pi_A(s) = \prod_{i=1}^{p} (s - \lambda_i)^{r_i}$$

où

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les p racines distinctes du polynôme caractéristique ($\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$),
- r_i est la multiplicité de la racine λ_i.

D'après le théorème de d'Alembert on a $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$. On a donc la proposition suivante :

Proposition 4.2.1. *Si A est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ qui admet p valeurs propres complexes distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, si l'on note r_i la multiplicité de λ_i, alors*

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = n.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.2.2 Valeurs propres, trace et déterminant

Exercices :
Exercice A.1.12

On va maintenant donner une autre façon de noter les valeurs propres.

Prenons un exemple, on suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{C})$ admet 3 valeurs propres distinctes : λ_1 valeur propre double, λ_2 valeur propre simple, λ_3 valeur propre de multiplicité 4.

Avec les notations précédentes, on a : $n = 7, p = 3, r_1 = 2, r_2 = 1, r_3 = 4$.

On définit maintenant $\mu_1 = \mu_2 = \lambda_1,\ \ \mu_3 = \lambda_2,\ \ \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \lambda_3$.

On dit que $\mu_i, i = 1,\ldots,7$ sont les 7 valeurs propres distinctes ou confondues de A.

On a bien sûr $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(s-\lambda_i)^{r_i} = \prod_{i=1}^{n}(s-\mu_i)$.

Avec la notation précédente, la proposition 4.2.1 peut s'énoncer :
Une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ admet n valeurs propres complexes distinctes ou confondues $\mu_i, i = 1,\ldots,n$.

La relation entre les coefficients d'un polynôme et ses racines donne la proposition :

Proposition 4.2.2. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et si $\mu_1,\ldots,\mu_n$ sont ses valeurs propres complexes (distinctes ou confondues), alors*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– *la trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres :*

$$\operatorname{trace} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i,$$

– *le déterminant de A est égal au produit de ses valeurs propres :*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$

Démonstration –

$$\Pi_A(s) = \det(sI - A) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)\dots(s-\mu_n). \tag{4.2.1}$$

Le coefficient de s^{n-1} dans $\det(sI - A)$ est $-\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ car, dans le calcul du déterminant, seul le produit des éléments de la diagonale de $sI - A$ donne un terme en s^{n-1}. D'autre part, le coefficient de s^{n-1} dans $(s-\mu_1)(s-\mu_2)\dots(s-\mu_n)$ est $-\sum_{i=1}^{n} \mu_i$.

On a vu dans l'équation (4.1.3) que $\Pi_A(0) = (-1)^n \det(A)$. D'autre part,
$\Pi_A(0) = (0-\mu_1)(0-\mu_2)\dots(0-\mu_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \mu_i$, ce qui démontre la deuxième propriété.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.3 Sous-espace propre

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.3.1 Définition du sous-espace propre

Exercices :
Exercice A.1.13
Exercice A.1.14

On a vu qu'à une valeur propre on peut associer une infinité de vecteurs propres. Ce résultat peut être précisé de la façon suivante :

Proposition 4.3.1. *Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(K)$, si $\lambda \in K$ est une valeur propre de A, si on note V_λ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n1}(K)$ défini par*

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n1}(K) \mid AY = \lambda Y\},$$

alors V_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}(K)$

Démontrer cette proposition en exercice.

Définition 4.3.1. *Si λ est une valeur propre de A, on appelle* **sous-espace propre** *associé à λ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}(K)$, noté V_λ, défini par :*

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n1}(K) \mid AY = \lambda Y\} = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I).$$

Définition du sous-espace propre

Le sous-espace propre V_λ contient les vecteurs propres (non nuls) associés à λ et le vecteur nul. λ est une valeur propre de A, donc $V_\lambda \neq \{0\}$, donc $\dim V_\lambda \geq 1$.

Si u est un endomorphisme de E, si λ est une valeur propre de u, on peut également définir le sous-espace propre associé à λ. On a alors un sous-espace vectoriel de E :

$$V_\lambda = \{\vec{x} \in E, u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}.$$

Exemple : Soit la matrice $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de l'exercice A.1.5, alors on a

$$V_1 = \mathrm{vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ et } V_2 = \mathrm{vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.3.2 Somme directe des sous espaces propres

Documents :
Document C.1.1

Proposition 4.3.2. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ et si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ sont p vecteurs propres associés c'est à dire $AY_i = \lambda_i Y_i$, $Y_i \neq 0$, alors la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ est libre.*

Démonstration – Elle se fait par récurrence sur p.

- $p = 1$, il est évident que la famille (Y_1) est libre puisque un vecteur propre est non nul par définition.
- On suppose que la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1})$ est libre. On va démontrer par l'absurde que la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ est libre.
  On suppose que $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ est liée, alors, d'après le chapitre 1, Y_p est combinaison linéaire de $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1})$.
  $$Y_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i Y_i$$
  On multiplie par la matrice A, puis on remarque que les vecteurs $Y_1, Y_2, ..., Y_p$ sont des vecteurs propres :
  $$AY_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i AY_i \Longleftrightarrow \lambda_p \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i Y_i = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \lambda_i Y_i \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_p) Y_i = 0.$$

Or la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1})$ est libre donc

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_p) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, p-1.$$

Or les valeurs propres sont toutes distinctes, donc $\lambda_i - \lambda_p \neq 0$ donc $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, p-1$. On a donc $Y_p = 0$, ce qui impossible puisque Y_p est un vecteur propre.
On vient de démontrer par l'absurde que la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ est donc libre.

Proposition 4.3.3. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$, alors les sous-espaces vectoriels $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_p}$ sont en somme directe.*

La démonstration de la proposition précédente est proposée en document.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.3.3 Multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous espace propre

Exercices :
Exercice A.1.15

Documents :
Document C.1.2

Proposition 4.3.4. *Si λ est une valeur propre de A, si V_λ est le sous-espace propre, si r est la multiplicité de λ et si d est la dimension de V_λ, alors*

$$d \leq r.$$

Vous pouvez lire la démonstration de cette proposition en document.

Exemple 1 : On définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont les termes diagonaux. $\lambda = 1$ est donc valeur propre double et $r = 2$.

Après calcul, on trouve

$$V_1 = vect < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

donc dim $V_1 = d = 1$, on a donc $d < r$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple 2 : La matrice identité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a pour valeur propre double $\lambda = 1$ donc $r = 2$.

De plus $V_1 = \mathcal{M}_{21}$ en effet $\forall Y \in \mathcal{M}_{21},\ IY = Y$! Donc dim $V_1 = d = 2$. Ici, on a donc $d = r$.

Proposition 4.3.5. *Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(K)$, si $\lambda_1, \ldots., \lambda_p$ sont les p valeurs propres distinctes appartenant à K, si $d_1, \ldots, d_p$ sont les dimensions des sous-espaces propres $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_p}$. alors*

$$\sum_{i=1}^{p} d_i \leq n.$$

Démonstration –
Si on note $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les multiplicités des valeurs propres, on a $\sum_{i=1}^{p} d_i \leq \sum_{i=1}^{p} r_i$.
Or les valeurs propres sont les racines dans K du polynôme caractéristique.
Ce polynôme est toujours de degré n, donc il admet n racines dans $\mathbb{C}$ et au plus n racines dans $\mathbb{R}$.
Donc on a toujours $\sum_{i=1}^{p} r_i \leq n$.

Multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous espace propre

4.4 Réduction d'une matrice

4.4.1 Définition de la diagonalisation

Exercices :
Exercice A.1.16

Définition 4.4.1. *On dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est diagonalisable dans K s'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$ ou, ce qui est équivalent, $D = P^{-1}AP$.*

Les matrices A et D sont semblables, donc elles ont les mêmes valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$: ce sont les éléments de la diagonale de D. Donc

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$D = P^{-1}AP \Longleftrightarrow AP = PD,$$

Si on note $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les colonnes de P, on a

$$AP = PD \Longleftrightarrow \forall i = 1,2,\ldots,n, \;\; AY_i = \mu_i Y_i.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démontrer cette équivalence.

P est inversible, donc ses colonnes sont non nulles donc $Y_i \neq 0$. Donc les colonnes Y_i de P sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres μ_i.

Une matrice A diagonale appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ est diagonalisable dans K : il suffit de choisir $D = A, \;\; P = I$.

4.4.2 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Documents :
Document C.1.3

Cours :
Diagonalisation - définition

Théorème 4.4.1. *$A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ est diagonalisable dans K si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ constituée de vecteurs propres de A, c'est-à-dire une base $\mathcal{B} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ telle que $AY_i = \mu_i Y_i$, $\mu_i \in K$.*

Démonstration –

Dans toute cette démonstration les matrices ou vecteurs sont à coefficients dans K.

A est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ il existe D diagonale, il existe P inversible qui vérifient $D = P^{-1}AP$

$\Leftrightarrow$ il existe D diagonale, il existe P inversible qui vérifient $PD = AP$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $(Y_1 \ldots Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ dont les vecteurs vérifient $AY_i = \mu_i Y_i$

$\Leftrightarrow$ il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ constituée de vecteurs propres de A.

Bien-sûr, dans la démonstration précédente, les Y_i sont les colonnes de P et les μ_i sont les termes diagonaux de D. On a déjà utilisé cette notation dans le paragraphe Diagonalisation-définition

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème 4.4.2. *$A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est diagonalisable dans K si et seulement si elle admet p valeurs propres distinctes dans K vérifiant*

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = n \quad et \quad d_i = r_i \; \forall i = 1 \ldots p$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\sum_{i=1}^{p} d_i = n$$

(r_i est la multiplicité de λ_i, d_i est la dimension du sous-espace propre associé à λ_i).

On peut remarquer que, si $K = \mathbb{C}$, la condition $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$ est toujours vérifiée.

La démonstration de ce théorème est proposée en document.

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.4.3 Condition suffisante de diagonalisation

Exercices :
Exercice A.1.17

Proposition 4.4.1. *Si A appartient à $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ et si A admet n valeurs propres distinctes (donc simples) dans K alors A est diagonalisable dans K*

Démonstration – A admet n valeurs propres distinctes dans K.

Or A admet au plus n valeurs propres comptées avec leur multiplicité, donc les valeurs propres sont simples :

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1, \text{ donc } \sum_{i=1}^{n} r_i = n.$$

D'autre part $V_{\lambda_i} \neq \{0\}$ donc $d_i \geq 1$.

De plus $d_i \leq r_i = 1$, donc $d_i = r_i = 1$.

On peut donc appliquer le théorème 4.4.2.

Cette condition suffisante n'est pas nécessaire. En effet, la matrice identité I a pour valeur propre 1, de multiplicité n, et pourtant I est diagonale (et donc diagonalisable !).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Attention ! Une matrice peut être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Par exemple si A est la matrice de la rotation d'angle $\theta \neq k\pi$ dans le plan, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car elle n'a pas de valeurs propres réelles. Par contre elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, puisqu'elle admet 2 valeurs propres complexes distinctes.

4.4.4 Trigonalisation d'une matrice

Documents :
Document C.1.4

Cours :
Multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous espace propre

Il existe des matrices qui ne sont pas diagonalisables.

Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure, elle admet une seule valeur propre $\lambda = 1$ qui est double : $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Si A était diagonalisable alors elle serait semblable à la matrice identité et on aurait $A = PIP^{-1} = I$! Ceci est faux, donc A n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$).

Autre démonstration : on a étudié cette matrice dans le cours référencé et on a montré que $d = 1$, $r = 2$ donc $d < r$. Donc la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation n'est pas vérifiée, donc la matrice A n'est pas diagonalisable !

Quand on ne peut pas diagonaliser une matrice, on peut chercher une autre forme de matrice semblable, par exemple une matrice T triangulaire supérieure.

Théorème 4.4.3. *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La démonstration de ce théorème est donnée en document.

On peut citer un autre théorème en remplaçant triangulaire supérieure par triangulaire inférieure.

La trigonalisation d'une matrice A, c'est-à-dire la recherche d'une matrice triangulaire semblable à A, nécessite la connaissance de toutes les valeurs propres de A, ce qui est coûteux numériquement. C'est donc une opération que l'on évite de faire effectivement. Mais, sur le plan mathématique, cela est très important, comme on le verra plus tard.

4.4.5 Applications de la diagonalisation

Parmi les applications de la réduction de matrices, on peut en citer deux :

Calcul de la puissance d'une matrice

Si $A \in M_{n,n}(K)$ est diagonalisable dans K, alors il existe une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}$$

et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On peut montrer facilement que

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

avec

$$D^k = \begin{pmatrix} \mu_1^k & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \mu_n^k \end{pmatrix}$$

Résolution d'un système de suites récurrentes

(u_n) et (v_n) sont deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_0, v_0 \text{ donnés} \\ u_{n+1} = a_{11}u_n + a_{12}v_n, n \in N \\ v_{n+1} = a_{21}u_n + a_{22}v_n, n \in N \end{cases}$$

On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, le système précédent s'écrit :

$$X_{n+1} = AX_n$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$X_n = A^n X_0$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.5 Compléments

4.5.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Exercices :
Exercice A.1.18
Exercice A.1.19

Préliminaire : Si A est une matrice carrée, $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$, on peut définir ses puissances successives A^2, A^3, ... Si π est un polynôme à coefficients dans K donné par :

$$\pi(s) = s^n + c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \cdots + c_{n-1} s + c_n,$$

on peut alors définir la matrice carrée

$$\pi(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \cdots + c_{n-1} A + c_n I.$$

La matrice $\pi(A)$ commute avec A, c'est à dire $A \times \pi(A) = \pi(A) \times A$. En effet, le produit matriciel est distributif par rapport à la somme et, de plus, A commute avec A^k, c'est à dire $AA^k = A^k A = A^{k+1}$.

Théorème 4.5.1. *Si A appartient à $\mathcal{M}_{n,n}(K)$, si π_A est son polynôme caractéristique noté*

$$\pi_A(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n,$$

alors

$$\pi_A(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Remarque : Une des conséquences de ce théorème est que

$$A^n = -\alpha_1 A^{n-1} - \cdots - \alpha_{n-1} A - \alpha_n I$$

et donc, pour tout k tel que $k \geq n$, A^k peut s'écrire comme une combinaison linéaire de I, A, ... A^{n-1}.

Démonstration .- On ne va pas donner la démonstration de ce théorème dans le cas général,mais seulement dans le cas particulier où A est diagonalisable dans K.

On suppose donc qu'il existe une base $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ constituée de vecteurs propres de A.

D'après l'exercice A.1.18, une matrice B appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(K)$ est nulle si et seulement si, $\forall i = 1, ..., n$, $BY_i = 0$. On applique ce résultat à la matrice $\pi_A(A)$. On va donc montrer que pour $i = 1, \ldots, n$ on a :

$$(A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots \alpha_{n-1} A + \alpha_n I) Y_i = 0. \tag{4.5.1}$$

(μ_i, Y_i) est un couple propre de A, on a donc pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$

$$A^k Y_i = A^{k-1}(AY_i) = \mu_i A^{k-1} Y_i = \mu_i^2 A^{k-2} Y_i = \cdots = \mu_i^k Y_i.$$

On a donc :

$$\begin{array}{rcl} (A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots \alpha_{n-1} A + \alpha_n I) Y_i & = & A^n Y_i + \alpha_1 A^{n-1} Y_i + \ldots \alpha_{n-1} A Y_i + \alpha_n Y_i \\ & = & \mu_i^n Y_i + \alpha_1 \mu_i^{n-1} Y_i + \ldots \alpha_{n-1} \mu_i Y_i + \alpha_n Y_i \\ & = & (\mu_i^n + \alpha_1 \mu_i^{n-1} + \ldots \alpha_{n-1} \mu_i + \alpha_n) Y_i \\ & = & \pi_A(\mu_i) Y_i = 0 Y_i = 0. \end{array}$$

En effet, μ_i est racine du polynôme caractéristique π_A, donc $\pi_A(\mu_i) = 0$. On vient donc d'établir la relation 4.5.1 et le théorème est démontré dans le cas particulier d'une matrice diagonalisable.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est

$$\pi_A(s) = (s-2)^2 + 1 = s^2 - 4s + 5.$$

Calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a bien :

$$\pi_A(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton permet aussi de calculer l'inverse d'une matrice. Dans l'exemple précédent,

$$A^2 - 4A + 5I = 0,$$

donc

$$\frac{1}{5}A(-A+4I) = I$$

et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{5}(-A+4I).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.5.2 Formes de Jordan

Cours :
Trigonalisation d'une matrice

On a démontré dans le cours référencé que toute matrice carrée A était semblable à une matrice triangulaire. En fait, on peut même obtenir une forme triangulaire supérieure particulière appelée **forme de Jordan** de la matrice A.

On appelle **bloc de Jordan** associé à la valeur propre λ de A, une matrice carrée J_λ de la forme :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

La matrice triangulaire supérieure J_λ a une taille qui dépend de la valeur propre λ de A. Cette matrice est telle que :
- tous ses éléments diagonaux sont égaux et valent λ,
- seule la première "sur-diagonale" est non-nulle et ses éléments valent 1.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Il est alors possible de montrer que A est semblable à une matrice J de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_m} \end{pmatrix}.$$

La matrice J est donc une matrice “diagonale par blocs”. Les blocs de Jordan J_{λ_k} ont une taille que l'on peut déterminer théoriquement. Les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ étant **distinctes ou non** (évidemment, si ν_k est la taille de la matrice J_{λ_k}, on a $\sum_{k=1}^m \nu_k = n$). Cela veut dire qu'à une valeur propre on peut associer **plusieurs** blocs de Jordan de tailles diverses. Si la valeur λ est simple, alors le bloc de Jordan associé est réduit à une matrice 1×1 qui est donc la valeur propre elle-même !

Exemple de forme de Jordan :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Voici un exemple de forme de Jordan. On suppose que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_5$ sont distinctes. :

$$A' = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & & & & & & \\
\mathbf{0} & \lambda_1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & & & & & & & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_1 & \mathbf{1} & & & & & & & & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_1 & & & & & & & & & & \\
& & & & \lambda_2 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & & & & & & \\
& & & & \mathbf{0} & \lambda_2 & \mathbf{1} & & & & & & & \\
& & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_2 & & & & & & & \\
& & & & & & & \lambda_2 & \mathbf{1} & & & & & \\
& & & & & & & \mathbf{0} & \lambda_2 & & & & & \\
& & & & & & & & & \lambda_3 & \mathbf{1} & & & \\
& & & & & & & & & \mathbf{0} & \lambda_3 & & & \\
& & & & & & & & & & & \lambda_4 & & \\
& & & & & & & & & & & & \lambda_4 & \\
& & & & & & & & & & & & & \lambda_5
\end{pmatrix}$$

Pour plus de lisibilité, les termes nuls ne sont pas indiqués.

Dans ce cas, on a
- $n = 14$: taille de la matrice A'.
- $m = 7$: nombre de blocs de Jordan.

A' a 5 valeurs propres distinctes : λ_1 de multiplicité 4, λ_2 de multiplicité 5, λ_3 double, λ_4 double, λ_5 simple.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si A est semblable à A', alors $A = PA'P^{-1}$. A admet les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

En utilisant les propriétés du produit matriciel, on peut montrer facilement que
- P_1, la première colonne de P, est vecteur propre de A associé à λ_1,
- P_5, et P_8 sont vecteurs propres de A associé à λ_2,
- P_{10} est vecteur propre de A associé à λ_3,
- P_{12} et P_{13} sont vecteurs propres de A associé à λ_4,
- P_{14} est vecteur propre de A associé à λ_5.

On peut en déduire que $d_1 \geq 1, d_2 \geq 2, d_3 \geq 1, d_4 \geq 2, d_5 \geq 1$.

On peut montrer (admis) que la dimension de chacun des sous-espaces propres vaut $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = 2, d_5 = 1$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre 4

Exercice A.1.1 Ch4-Exercice1

Quels sont les vecteurs propres de l'application identité ? Préciser les valeurs propres associées.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch4-Exercice2

On demande de répondre à cet exercice de façon intuitive , on verra plus loin comment l'aborder de façon plus systématique :

- Si u est la projection de l'espace sur un plan parallèlement à une droite, citer des vecteurs propres de u et les valeurs propres associées.
- Si u est la rotation du plan d'angle α :
  - quand $\alpha = \pi$, citer des vecteurs du plan qui soient vecteurs propres de u, préciser les valeurs propres associées,
  - quand $\alpha = \frac{\pi}{3}$, pouvez-vous citer des vecteurs du plan qui soient vecteurs propres de u ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch4-Exercice3

Montrer que si Y, est vecteur propre de A, alors αY est vecteur propre de A (pour tout $\alpha \in K$ non nul).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch4-Exercice4

1. Soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}$, déterminer ses vecteurs propres et ses valeurs propres.
2. – Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 5.2 & 0 \\ 0 & 0 & 6.9 \end{pmatrix}.$$

   – Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice diagonale.
3. Montrer que : A non inversible $\Longleftrightarrow$ 0 est valeur propre de A.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch4-Exercice5

– Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres réels ($K = \mathbb{R}$) des matrices :
$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

– Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres complexes ($K = \mathbb{C}$) des matrices précédentes puis de la matrice : $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i+1 & 2i \end{pmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch4-Exercice6

Démontrer la propriété suivante : si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire ses valeurs propres sont ses termes diagonaux.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch4-Exercice7

Démontrer les propriétés suivantes : si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$:

1. $\{\lambda$ valeur propre de $A\} \Longleftrightarrow \{\bar{\lambda}$ valeur propre de $\bar{A}\}$ (avec la même multiplicité).
2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, alors :

$$\{\lambda \text{ valeur propre de } A\} \Longleftrightarrow \{\bar{\lambda} \text{ valeur propre de } A \text{ (avec la même multiplicité) }\}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch4-Exercice8

Les matrices A et A^T ont-elles les mêmes vecteurs propres ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch4-Exercice9

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. On peut vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On définit $B = P^{-1}AP$, calculer B, ses valeurs propres et ses vecteurs propres, comparer avec ceux de A. Qu'en pensez-vous ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch4-Exercice10

Vérifier sur les matrices de l'exercice A.1.5 que $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$ (notations de la proposition 4.2.1).

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch4-Exercice11

Pour chacune des affirmations suivantes répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre réponse à l'aide de démonstrations, d'exemples ou de contre-exemples selon le cas.

1. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres réelles.
2. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent 2 valeurs propres réelles.
3. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ qui admettent 2 valeurs propres réelles.
4. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres complexes distinctes ou non.
5. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent 1 valeur propre réelle et 1 valeur propre complexe non réelle.
6. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent 1 seule valeur propre réelle simple.
7. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ qui n'admettent pas de valeur propre réelle.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch4-Exercice12

Vérifier sur les matrices de l'exercice A.1.5 que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres et que son déterminant est le produit de ses valeurs propres.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch4-Exercice13

On définit : :

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n1} \mid AY = \lambda Y\}.$$

montrer que : V_λ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch4-Exercice14

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reprendre les calculs qui ont déja été faits dans le paragraphe "Valeur et vecteur propres d'une matrice" pour donner une base de V_0 et V_1.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch4-Exercice15

Reprendre les matrices de l'exercice A.1.5 dans le cas $K = \mathbb{C}$. Pour chacune d'elles, donner la multiplicité r_i de chacune de ses valeurs propres λ_i et préciser la dimension d_i du sous espace propre V_{λ_i}. Vérifier l'inégalité entre r_i et d_i.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch4-Exercice16

Montrer que si $A = PDP^{-1}$ où la matrice D est diagonale, alors les colonnes de P sont vecteurs propres de A, les éléments de la diagonale de D sont les valeurs propres de A.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch4-Exercice17

Les matrices de l'exercice A.1.5 sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$?
Si oui, donner une matrice D diagonale et une matrice P régulière telle que $D = P^{-1}AP$.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.18 Ch4-Exercice18

Soit $B \in \mathcal{M}_{n,n}$ et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ (vecteur non nul), est-ce que $BX = 0 \Longrightarrow B = 0$?
Montrer que si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}$, alors

$$BX_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n \implies B = 0.$$

retour au cours

Solution

Exercice A.1.19 Ch4-Exercice19

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(K)$ telle que

$$\pi_A(s) = s^n - 1$$

Donner A^{-1} en fonction de A.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 TD4-Exercice1

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres réels, puis complexes, des matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer, suivant la valeur de a, les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice :

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+a) & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de :

$$A_5 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

réponses :

1. (a) $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,\ Y_0 = \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, Y_1 = \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_2 = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2,\ Y_1 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_2 = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(c) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1 + j, \lambda_3 = -1 + j^2,$

$$Y_1 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_2 = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, Y_3 = \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda = 1$.

– Si $a = 0$, $Y = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

– Si $a \neq 0$, $Y = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD4-Exercice2

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice A ?
2. Si λ est valeur propre de A, déterminer les vecteurs propres correspondants.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD4-Exercice3

- Si (λ, Y) est un couple propre de la matrice A, donner un couple propre de la matrice $A + \alpha I$.
- Si (λ, Y) est un couple propre de la matrice A, donner un couple propre de la matrice A^2.

Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.4 TD4-Exercice4

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que si $A^2 + I = 0$, alors A n'admet aucune valeur propre réelle.

   (b) Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = -I$.

2. Montrer qu'il n'existe aucune matrice appartenant à $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I = 0$.

Question 1a Aide 1 Aide 2
Question 1b Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD4-Exercice5

1. Soient 2 matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$.
   (a) Montrer que si 0 est valeur propre de AB alors 0 est valeur propre de BA.
   (b) Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.
2. Soient 2 matrices A et B appartenant respectivement à $\mathcal{M}_{n,m}$ et $\mathcal{M}_{m,n}$. Soit λ une valeur propre non nulle de AB. On note V_λ le sous espace propre correspondant.
   (a) Montrer que λ est valeur propre de BA. On note W_λ le sous-espace propre correspondant.
   (b) Soit $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ une base de V_λ, montrer que $(BY_1, BY_2, \ldots, BY_p)$ est une famille libre.
   (c) En déduire que $\dim V_\lambda \leq \dim W_\lambda$.
   (d) En déduire que $\dim V_\lambda = \dim W_\lambda$.
3. On définit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = XY^T$. Calculer X^TY. Calculer les valeurs et vecteurs propres de C. Les résultats obtenus dans cette question peuvent être généralisés, c'est ce que l'on verra à la question suivante.
4. Soient 2 vecteurs colonnes non nuls X et Y appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}$ avec $n > 1$.
   (a) Montrer que 0 est valeur propre de XY^T. Quelle est la dimension de V_0 ? En déduire une inégalité sur la multiplicité de la valeur propre 0.
   (b) On suppose que $X^TY \neq 0$, en déduire une autre valeur propre de XY^T.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5
TD4-Exercice5

5. Soit A une matrice de rang 1 appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ avec $n > 1$.
   (a) On suppose que la trace de A est différente de 0, déterminer toutes les valeurs propres de A et leur multiplicité.
   (b) On suppose que la trace de A est nulle. Quelles sont toutes les valeurs propres de A et leur multiplicité ?
   (c) A quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?

Question 1a Aide 1 Aide 2
Question 1b Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1 Aide 2
Question 2c Aide 1
Question 2d Aide 1
Question 3 Aide 1
Question 4a Aide 1 Aide 2
Question 4b Aide 1 Aide 2
Question 5a Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 5b Aide 1 Aide 2
Question 5c Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD4-Exercice6

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et f l'application définie par $f(x) = Ax, x \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Donner la matrice $\hat{A}$ associée à f quand on choisit cette base.
   Réponse : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4, Y_1 = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_2 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que si $A = P\hat{A}P^{-1}$, alors $A^n = P\hat{A}^nP^{-1}, (n \geq 0)$. Donner A^n en fonction de n.
   Réponse : $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-4)^n + 2(-1)^n & -2(-4)^n + 2(-1)^n \\ -(-4)^n + (-1)^n & 2(-4)^n + (-1)^n \end{pmatrix}$.
3. La relation précédente est-elle encore valable pour $n = -1$?
4. On considère les suites réelles (v_n) et (w_n) définies par :
   $w_0 \in \mathbb{R}, v_0 \in \mathbb{R}, v_{n+1} = -2v_n + 2w_n, w_{n+1} = v_n - 3w_n$. Exprimer v_{n+1} et w_{n+1} à l'aide v_0, w_0 et n.
5. On considère la suite réelle (u_n) définie par
   $$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } u_{n+1} = \frac{-2u_n + 2}{u_n - 3}.$$
   Exprimer u_n en fonction de n et de u_0. (On écrira $u_n = \frac{v_n}{w_n}$).
   On suppose que u_n est défini pour tout n. La suite est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.
   Réponse : oui et si $u_0 = 2, \ell = 2$, si $u_0 \neq 2, \ell = -1$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6
TD4-Exercice6

Question 1	Aide 1	Aide 2	
Question 2	Aide 1		
Question 3	Aide 1		
Question 4	Aide 1	Aide 2	
Question 5	Aide 1	Aide 2	Aide 3

Exercice A.2.7 TD4-Exercice7

1. Les matrices de l'exercice A.2.1 sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{C}$?
   réponse : A_1, A_2, A_3, A_5 : oui ; A_4 : non.
2. On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, pour quelles valeurs de a, b, c la matrice A est-elle diagonalisable ? Pour quelles valeurs de a, b, c la matrice A est-elle inversible ?
   réponse : A est inversible $\Longleftrightarrow c \neq 0$, A est diagonalisable $\Longleftrightarrow c \neq 1, a = 0$.
3. On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a & 1 \\ 1-b & a & a-1 & -b \\ b & -a & 1-a & 1+b \\ 0 & a & a & 0 \end{pmatrix}$, pour quelles valeurs de a, b la matrice A est-elle diagonalisable ? Pour quelles valeurs de a, b la matrice A est-elle inversible ?
   réponse : A est diagonalisable $\Longleftrightarrow a = b = 0$.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.2.8 TD4-Exercice8

1. Sans calculs dire si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ qui est diagonalisable et qui admet une valeur propre de multiplicité n, que vaut A ?

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9 TD4-Exercice9

Soient 2 matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$, on suppose que $AB=BA$. Soit λ une valeur propre de A, on note V_λ le sous-espace propre associé.

1. Montrer que si $Y \in V_\lambda$ alors $BY \in V_\lambda$.
2. On suppose maintenant que λ est de multiplicité 1, en déduire que si Y est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ alors Y est vecteur propre de B.
3. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes dans K. Montrer alors que A et B sont diagonalisables dans K. On montrera plus précisément qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ constituée de vecteurs propres communs à A et B.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD4-Exercice10

Soit la matrice J appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$, $n \geq 2$, définie par :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. J est elle diagonalisable ?
2. Déterminer les valeurs propres de J, leur multiplicité et la dimension du sous-espace propre associé.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.11 TD4-Exercice11

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer les valeurs propres de A et leur multiplicité. On ne demande pas de calculer les vecteurs propres maintenant.
   Réponse : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

   (b) Montrer que

$$\dim \text{Ker } (A - I) = 1, \dim \text{Ker } (A - 2I) = 1, \dim \text{Ker } (A - I)^2 = 2.$$

2. (a) Montrer dans le cas général que Ker $(A - I) \subset$ Ker $(A - I)^2$.

   (b) Montrer que dans le cas particulier ici, l'inclusion est stricte.
   On pourra donc en déduire qu'il existe z vérifiant :

$$\begin{cases} z \in \text{Ker } (A - I)^2 \\ z \notin \text{Ker } (A - I) \end{cases}$$

   (c) Montrer que

$$\begin{cases} z \in \text{Ker } (A - I)^2 \\ z \notin \text{Ker } (A - I) \end{cases} \Leftrightarrow (A - I)z = y_1 \text{ où } y_1 \text{ est un vecteur propre associé à } 1$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.11
TD4-Exercice11

3. Si y_1 est un vecteur propre de A associé à 1, si y_2 est un vecteur propre de A associé à 2, si z vérifie $(A-I)z = y_1$. Montrer que la famille (y_1, y_2, z) est libre (penser à utiliser $A-I$).
4. On définit l'application linéaire u de $\mathcal{M}_{3,1}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}$ par $u(x) = Ax$
   (a) Quelle est la matrice de u quand on munit $\mathcal{M}_{3,1}$ de la base canonique ?
   (b) Quelle est la matrice de u quand on choisit la base (y_2, y_1, z) ?
   (c) En déduire que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = (y_2 \, y_1 \, z)$
   (d) Calculer y_1, y_2, z pour obtenir P.
   Une réponse possible :$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5. Utilisez le théorème de CAYLEY-HAMILTON pour calculer A^4 et A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
   Réponse : $A^4 = 11A^2 - 18A + 8I, \; A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$.

Question 1b	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2b	Aide 1	Aide 2	
Question 2c	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 4a	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 4b	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 4c	Aide 1		
Question 5	Aide 1	Aide 2	Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre 4

Exemple B.1.1

Soit $u \in \mathscr{L}(E;E)$ non injective alors Ker $u \neq \{\vec{0}\}$. Il existe donc un vecteur $\vec{y}$ non nul tel que $u(\vec{y}) = \vec{0} = 0\vec{y}$. Donc 0 est valeur propre et tous les vecteurs non nuls du noyau sont vecteurs propres associés à la valeur propre nulle.

retour au cours

Exemple B.1.2

Soit A la matrice de la rotation plane

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Pour que $(\lambda, Y) \in K \times \mathcal{M}_{n1}$ soit un couple propre, on doit avoir

$$\begin{cases} y_1 \cos\theta - y_2 \sin\theta & = \lambda y_1, \\ y_1 \sin\theta + y_2 \cos\theta & = \lambda y_2, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} y_1 (\cos\theta - \lambda) - y_2 \sin\theta & = 0, \\ y_1 \sin\theta + y_2 (\cos\theta - \lambda) & = 0, \end{cases}$$

Si le déterminant de ce système est non nul, la seule solution est $y_1 = y_2 = 0$, donc pour que ce système admette une solution non nulle, il faut que son déterminant soit nul, ce qui conduit à

$$(\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0$$

On va donc étudier deux cas $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$

– Si $K = \mathbb{R}$, on cherche λ dans $\mathbb{R}$ et dans ce cas si $\sin\theta \neq 0$ il n'y a pas de valeurs propres réelles (donc pas de vecteurs propres réels). Si $\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\lambda = 1$, y_1, y_2 quelconques. Si $\theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\lambda = -1$, y_1, y_2 quelconques. On retrouve bien le résultat intuitif que l'on avait trouvé dans l'exercice A.1.2 :
  – si $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, il n'y pas de vecteurs propres réels,

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2

- si $\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, la rotation est alors l'identité, donc tout vecteur non nul est propre et 1 est valeur propre,
- si $\theta = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, la rotation est alors la symétrie, donc tout vecteur non nul est propre et -1 est valeur propre.

– Si $K = \mathbb{C}$, on obtient 2 valeurs propres complexes possibles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta \\ \lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta \end{array} \right. .$$

Les vecteurs propres correspondants sont :

- $\lambda_1 = e^{i\theta}$, $Y_1 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $\gamma \in \mathbb{C}$,
- $\lambda_2 = e^{-i\theta}$, $Y_2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\gamma \in \mathbb{C}$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre 4

Document C.1.1 Démonstration de la proposition sur la somme directe des sous espaces propres

Proposition - Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ alors les sous espaces vectoriels $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_p}$ sont en somme directe.
Démonstration – On a vu, dans le chapitre 1, la propriété caractéristique d'une somme directe $H = E_1 \oplus E_2$ de deux sous-espaces vectoriels, à savoir que la décomposition d'un élément de H en la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 est unique. C'est cette propriété caractéristique qui se généralise au cas d'une somme directe de p sous-espaces vectoriels $H = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_p$, à savoir

$$H = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p \Longleftrightarrow \left\{\forall \vec{y} \in H, \exists ! \vec{y}_1 \in E_1, \ldots, \exists ! \vec{y}_p \in E_p \mid \vec{y} = \vec{y}_1 + \ldots + \vec{y}_p\right\}.$$

Revenons à la démonstration de la proposition et posons $H = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_p}$. Par définition de la somme de sous-espaces vectoriels, on a : $\forall Y \in H\ \exists Y_1 \in V_{\lambda_1}, \ldots, \exists Y_p \in V_{\lambda_p}$ tels que $Y = Y_1 + \ldots + Y_p$. Il reste à démontrer l'unicité d'une telle décomposition. Supposons donc qu'il existe deux décompositions :

$$Y_1 + \ldots + Y_p = \hat{Y}_1 + \ldots + \hat{Y}_p \Longleftrightarrow (Y_1 - \hat{Y}_1) + \ldots + (Y_p - \hat{Y}_p) = 0.$$

Or chacun des vecteurs $(Y_i - \hat{Y}_i)$ est un vecteur de V_{λ_i}, donc c'est le vecteur nul ou c'est un vecteur propre associé à λ_i. Si $Y_i \neq \hat{Y}_i$, on aurait donc une relation linéaire entre des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes, ce qui est impossible puisque l'on a montré (proposition 4.3.2) qu'une telle famille était libre.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Mutiplicité et dimension du sous espace propre

Proposition C.1.1. *Soit λ une valeur propre de A, on note r la multiplicité de λ et d la dimension de V_λ, alors $d \leq r$.*

Démonstration – Si la dimension de V_λ est d, il existe une base de V_λ $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_d)$. On a bien sûr $AY_i = \lambda Y_i$.
On complète la famille libre $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_d)$ de façon à obtenir une base de $\mathcal{M}_{n,1}$, $\hat{\mathcal{B}} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.
On note u l'application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}$ définie par : $u(Y) = AY$.
La matrice de u quand on choisit la base canonique est A, la matrice de u quand on choisit la base $\hat{\mathcal{B}}$ est :

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & \widetilde{C} \\ 0 & 0 & \lambda & \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{C} \end{pmatrix}$$

En effet $AY_i = \lambda Y_i$, $\forall i$, $1 \leq i \leq d$, on obtient ainsi les d premières colonnes de $\widehat{A}$, les matrices $\widetilde{C}$ et $\widehat{C}$ sont des matrices appartenant respectivement à $\mathcal{M}_{d,n-d}$ et $\mathcal{M}_{n-d,n-d}$.
A et $\widehat{A}$ sont semblables, elles ont donc le même polynôme caractéristique :

$$\pi_A(s) = \det(sI_n - \widehat{A}) = (s-\lambda)^d \det(sI_{n-d} - \hat{C})$$

On en déduit donc que la multiplicité de λ est supérieure ou ègale à d.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Diagonalisation - condition nécessaire et suffisante

Théorème - Une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ soit diagonalisable est qu'elle admette p valeurs propres distinctes dans K vérifiant
$\sum_{i=1}^{p} r_i = n$ et $d_i = r_i, \forall i \ 1 \leq i \leq p$
(r_i : multiplicité de λ_i, d_i : dimension du sous-espace propre associé à λ_i).
Démonstration –
Il est facile de montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{p} r_i = n \\ d_i = r_i, \ \forall i, \ 1 \leq i \leq p \end{array} \right. \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} d_i = n \Leftrightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots V_{\lambda_p} = \mathcal{M}_{n,1}$$

On doit donc montrer maintenant que :

$$\mathcal{M}_{n,1} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots V_{\lambda_p} \Leftrightarrow$$
$$\text{il existe une base de } \mathcal{M}_{n,1} \text{ constituée de vecteurs propres de } A.$$

Le théorème 4.4.1 permet ensuite de conclure que A est diagonalisable.
implication - Si $\mathcal{M}_{n,1} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots V_{\lambda_p}$ l'union des bases de tous les sous-espaces propres est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}$, il existe donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}$ constituée de vecteurs propres de A.
réciproque - S' il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}$ constituée de vecteurs propres $Y_1, \ldots, Y_n$, alors tout vecteur Y appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}$ est une combinaison linéaire des éléments de cette base et en regroupant la combinaison de vecteurs propres correspondant à une même valeur propre, il est facile de voir que $Y = Z_1 + \ldots + Z_p$,
c'est-à-dire que $Y \in V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_p}$.
Donc on a $\mathcal{M}_{n,1} = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_p}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.4 Trigonalisation

Théorème - Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

Démonstration – On va montrer, par exemple, que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure et pour cela on va raisonner par récurrence sur la dimension n de la matrice A.

- Tout d'abord si $n = 1$, le théorème est évident et pour comprendre l'idée de la démonstration, nous allons établir le résultat pour $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ et $(\lambda, Y) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ un couple propre de A. Il existe donc un vecteur $Z \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que (Y, Z) soit une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. Soit P la matrice dont les colonnes sont Y et Z (on a donc $P_1 = Y$, $P_2 = Z$) et soit $T = P^{-1}AP$, quelle est la première colonne de T ? On a

$$TI_1 = P^{-1}API_1 = P^{-1}AY = \lambda P^{-1}Y = \lambda P^{-1}P_1 = \lambda I_1,$$

donc T est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}$$

ce qui démontre le résultat pour $n = 2$.

- Supposons le résultat vrai pour toute matrice d'ordre $n-1$ et montrons le pour $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Soit $(\lambda, Y) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un couple propre de A et soient $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que la famille $(Y, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et Q la matrice constituée par ces vecteurs colonnes (on a donc en particulier $Q_1 = Y$). Par le même raisonnement que précédemment on sait que $S = Q^{-1}AQ$ est de la forme

$$S = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{S} & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

où $\hat{S} \in \mathscr{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$. Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence qu'il existe une matrice $\hat{P} \in \mathscr{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$, régulière, telle que $\hat{T} = \hat{P}^{-1}\hat{S}\hat{P}$ soit triangulaire supérieure. Soit alors P la matrice de la forme suivante (matrice régulière) dont l'inverse est de la forme :

$$P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{P} & \\ 0 & & & \end{array}\right), \qquad P^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{P}^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

La matrice $T = P^{-1}SP$ prend alors la forme

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{P}^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{S} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{P} & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

soit

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \ldots & & \hat{P}^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \ldots & & \hat{S}\hat{P} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \ldots & & \hat{P}^{-1}\hat{S}\hat{P} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

On a donc

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \ldots & & \hat{T} & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

qui est bien triangulaire supérieure puisque $\hat{T}$ l'est. On a donc montré l'existence d'une matrice T triangulaire supérieure telle que

$$T = P^{-1}SP = P^{-1}Q^{-1}AQP = (QP)^{-1}A(QP)$$

ce qui achève la démonstration.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice A.1.1

Tous les vecteurs, sauf le vecteur nul, sont vecteurs propres de l'identité, la valeur propre associée est 1.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

- Pour la projection, les vecteurs non nuls du plan sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 1, les vecteurs non nuls de la droite sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.
- Pour la rotation si :
  - $\alpha = \pi$, la rotation est alors une symétrie, tout vecteur non nul du plan est vecteur propre associé à la valeur propre -1.
  - $\alpha = \frac{\pi}{3}$, on ne peut citer aucun vecteur propre.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

$\alpha Y \neq 0$,
$A(\alpha Y) = \alpha(AY) = \alpha\lambda Y = \lambda(\alpha Y)$,
donc αY est vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

1. Tout vecteur non nul Y est vecteur propre de I car $IY = Y$: la valeur propre associée est 1.
2. – Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $AY = \begin{pmatrix} 3.5y_1 \\ 5.2y_2 \\ 6.9y_3 \end{pmatrix} = \lambda Y \Longleftrightarrow \begin{cases} 3.5y_1 = \lambda y_1 \\ 5.2y_2 = \lambda y_2 \\ 6.9y_3 = \lambda y_3 \end{cases}$.

   Ce système admet comme solutions :

   – $\lambda = 3.5, y_2 = 0, y_3 = 0, y_1$ quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) : $Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   – $\lambda = 5.2, y_1 = 0, y_3 = 0, y_2$ quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) : $Y = y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   – $\lambda = 6.9, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3$ quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) : $Y = y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   – Ce résultat se généraliserait au cas d'une matrice diagonale quelconque : $\lambda = a_{ii}$ est valeur propre, les vecteurs propres associés sont proportionnels à la i-ème colonne de I. On a en effet d'après les propriétés du produit matriciel :

   $AI = A \Rightarrow AI_i = A_i = a_{ii} I_i$

   donc

   $A(\alpha I_i) = \alpha A I_i = \alpha a_{ii} I_i = a_{ii}(\alpha I_i)$

   On a donc un couple propre $(a_{ii}, \alpha I_i)$.

   On retrouve sur ces exemples très simples que si Y est vecteur propre associé à λ alors αY est également vecteur propre associé à λ.
3. A non inversible $\Leftrightarrow \exists Y \neq 0$, $AY = 0$,

   en effet le système $AY = 0$ admet toujours la solution nulle, et ce système admet une solution non nulle (c'est-à-dire n'admet pas de solution unique) si et seulement si A n'est pas inversible. On a donc :

A non inversible $\Leftrightarrow$ 0 est valeur propre de A

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

Pour A_1 :

$\pi_A(s) = (s+1)(s+2) - 2 = s^2 + 3s = s(s+3)$:
2 valeurs propres simples 0 et -3.
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 0$,

  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -y_1 + 2y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 2y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\lambda = -3$,

  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow 2y_1 + 2y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Il était prévisible que 0 était valeur propre de cette matrice. En effet puisque ses 2 colonnes sont proportionnelles, elle n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre.

Pour A_2 :

$\pi_A(s) = (s+1)(s+2) - 2 = s^2 + 3s = s(s+3)$,
on obtient le même polynôme caractéristique que pour la matrice A_1. Ce résultat est général : les matrices sont transposées l'une de l'autre.
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 0$,

  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\lambda = -3$,

  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow 2y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = -2y_1 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

On remarque en revanche que les vecteurs propres ne sont pas les mêmes que pour la matrice A_1.

Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_1 et A_2 on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients α complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour A_3 :
$\pi_A(s) = (s-1)^2 + 1$:
il n'existe pas de valeurs propres réelles.

Si on cherche les valeurs propres complexes, on obtient 2 valeurs propres complexes $1+i$ et $1-i$ (on peut remarquer que ces valeurs propres sont conjuguées : ce résultat est général, on le démontrera ultérieurement).
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1+i$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -iy_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = -iy_1 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$.
- $\lambda = 1-i$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -iy_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = iy_1 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour A_4 :
$\pi_A(s) = s(s-2)+1 = s^2-2s+1 = (s-1)^2$:
on a une valeur propre double $\lambda = 1$
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_4 on obtient bien sûr la même valeur propre (réelle donc complexe), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients α complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour A_5 :
$\pi_A(s) = (s-1)^2(s-2)$:
$\lambda = 1$ est valeur propre double, $\lambda = 2$ est valeur propre simple.
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1$,

  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow y_3 = 0 \Leftrightarrow$

  $$Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$$

- $\lambda = 2$,

  $$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -y_1 + y_3 & = 0 \\ \quad -y_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y_1 = y_3 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

  $$Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pour A_6 :
$\pi_A(s) = (s-1)^2(s-2)$,
$\lambda = 1$ est valeur propre double, $\lambda = 2$ est valeur propre simple.
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1$,

  $$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} .$$

- $\lambda = 2$,

  $$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -y_1 + y_2 = 0 \\ \qquad\quad y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$Y = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_5 et A_6 on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients α et β complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour A_7 :
$\pi_A(s) = (s-1)(s-2)(s+1)$,
1, 2, -1 sont valeurs propres simples.
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1$,

$$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 + 3y_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- $\lambda = 2$,

$$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} -y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = y_2 \\ y_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- $\lambda = -1$,

$$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_2 + 3y_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = -y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$Y = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

On démontrera plus tard la propriété que l'on vient de constater sur les matrices A_5, A_6, A_7 : à savoir les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale.
Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_7 on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients α complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour A_8,

$\pi_A(s) = (s-1)(s-2i)-(i+1) = s^2 + s(-1-2i)+i-1 = (s-i-1)(s-i)$

on obtient 2 valeurs propres complexes $1+i$ et i .

Recherche des vecteurs propres :

– $\lambda = 1+i$,

$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -iy_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = iy_1 \Leftrightarrow Y = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$.

– $\lambda = i$,

$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow (1-i)y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = (i-1)y_1 \Leftrightarrow$

$Y = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

Si A est triangulaire, il en est de même pour $sI - A$ donc $\det(sI - A)$ est le produit des termes diagonaux c'est-à-dire :

$$\pi_A(s) = \prod_{k=1}^{n} (s - a_{kk}),$$

d'où les racines évidentes.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

1. $$\pi_A(s) = \det\,(sI - A) = \overline{\det\,(\bar{s}I - \bar{A})} = \overline{\pi_{\bar{A}}(\bar{s})}.$$

   On en déduit donc la propriété suivante :
   λ valeur propre de $A \Leftrightarrow \pi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \pi_{\bar{A}}(\bar{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ valeur propre de $\bar{A}$

2. On utilise la question précédente : si $A \in \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{R})$, alors $A = \bar{A}$ donc si λ est valeur propre de A, $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de A (on a constaté cette propriété pour la matrice A_3 de l'exercice A.1.5)

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

Les matrices A et A^T n'ont pas les mêmes vecteurs propres, voir les matrices A_1 et A_2 de l'exercice A.1.5.

Retour à l'exercice ▲

On obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 33 & 72 \\ -12 & -26 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6,$$

$$Y_1 = \alpha \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}, Y_2 = \alpha \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On avait déja calculé les valeurs et vecteurs propres de la matrice A dans le paragraphe "Polynôme caractéristique" . A et B ont les mêmes valeurs propres 1 et 6. Les vecteurs propres de A étaient :

$$X_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, X_2 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de A et B ne sont pas les mêmes, mais on a les relations

$$Y_1 = P^{-1} X_1 \,,\; Y_2 = P^{-1} X_2$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

Dans cet exercice on fait référence aux matrices de l'exercice A.1.5.

1. FAUX : voir la matrice A_3.
2. VRAI : prendre par exemple la matrice A_1.
3. VRAI : on peut prendre comme précédemment la matrice A_1, ou si l'on cherche une matrice à coefficients complexes non réels, on peut prendre $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1-i & -i \\ i & 1+i \end{pmatrix}$.
4. VRAI : $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$ (voir le paragraphe "Valeurs propres - existence et multiplicité").
5. FAUX : une matrice $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres complexes (éventuellement confondues, éventuellement réelles), mais si $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, sont valeurs propres de A , $\bar{\lambda}_2$ est également valeur propre de A, or comme λ_2 n'est pas réelle, $\bar{\lambda}_2$ n'est pas réelle donc différente de λ_1, de plus $\bar{\lambda}_2 \neq \lambda_2$, on aurait donc une matrice ($\in \mathcal{M}_{22}$) avec 3 valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2$ ce qui est impossible.
6. FAUX : si $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$ donc A admet 2 valeurs propres complexes, or A a une seule valeur propre réelle simple, donc la 2e valeur propre serait non réelle et on serait ramené à 5).
7. FAUX Les valeurs propres complexes non réelles vont par 2 (les 2 complexes conjugués) et 3 n'est pas un multiple de 2 !

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

- $\text{trace} A_1 = -3 = 0 + (-3)$, $\det A_1 = 0 = 0 \times (-3)$, idem pour A_2,
- $\text{trace} A_3 = 2 = (1+i) + (1-i)$, $\det A_3 = 2 = (1+i) \times (1-i)$,
- $\text{trace} A_4 = 2 = 1 + 1$, $\det A_4 = 1 = 1 \times 1$,
- $\text{trace} A_5 = 4 = 1 + 1 + 2$, $\det A_5 = 2 = 1 \times 1 \times 2$, idem pour A_6,
- $\text{trace} A_7 = 2 = 1 + 2 + (-1)$, $\det A_7 = -2 = 1 \times 2 \times (-1)$,
- $\text{trace} A_8 = 2i + 1 = (1+i) + i$, $\det A_8 = i - 1 = (1+i) \times i$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

On montre que :
$V_\lambda \neq \emptyset$ car $0 \in V_\lambda$,
V_λ est stable : Y_1 et $Y_2 \in V_\lambda \Longrightarrow \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \in V_\lambda$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

Une base de V_0 est $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, V_0 est de dimension 1.

Une base de V_1 est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, V_1 est de dimension 2.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

1. pour $\lambda = 0, r = 1, d = 1$; pour $\lambda = -3, r = 1, d = 1$
2. pour $\lambda = 0, r = 1, d = 1$; pour $\lambda = -3, r = 1, d = 1$
3. pour $\lambda = 1 + i, r = 1, d = 1$; pour $\lambda = 1 - i, r = 1, d = 1$
4. pour $\lambda = 1, r = 2, d = 1$
5. pour $\lambda = 1, r = 2, d = 2$; pour $\lambda = 2, r = 1, d = 1$
6. pour $\lambda = 1, r = 2, d = 1$; pour $\lambda = 2, r = 1, d = 1$
7. pour $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1, r = 1, d = 1$
8. pour $\lambda = 1 + i, r = 1, d = 1$; pour $\lambda = i, r = 1, d = 1$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow AP_i = PD_i = d_{ii}P_i :$$

ce que l'on vient d'écrire découle uniquement des propriétés du produit matriciel, on a bien sûr utilisé de plus le fait que D est diagonale.
On obtient donc que P_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre d_{ii}.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

- Les matrices A_1, A_2, A_7 sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$ donc dans $\mathbb{C}$ puisqu'elles admettent n valeurs propres distinctes, on a

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, D_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Comme on l'a vu une matrice P possible est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres, donc par exemple :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice A_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (ses valeurs propres sont distinctes)

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

- Les matrices A_4, A_6 ne sont pas diagonalisables (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$) car la valeur propre 1 a pour multiplicité 2, la dimension de V_1 est égal à 1 donc $d < r$.
- La matrice A_5 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ car

$$r_1 = d_1 = 2, r_2 = d_2 = 1, \sum_{k=1}^{2} r_k = 3.$$

$$D_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on a $BX = 0$ et pourtant $B \neq 0$ et $X \neq 0$.
En revanche si $BX_i = 0$ pour tous les vecteurs X_i d'une base $\mathscr{E}$ de $\mathscr{M}_{n,1}$, on obtient que $BX = 0$ pour tout vecteur X de $\mathscr{M}_{n,1}$ (il suffit de décomposer X sur la base $\mathscr{E}$).
Ensuite, si on choisit successivement pour X les vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}$, on obtient que toutes les colonnes de B sont nulles, donc B est nulle.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

$A^n - I = 0$ donc $AA^{n-1} = I$, l'inverse de A est A^{n-1}.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.1

Quand une valeur propre est réelle, quelle est la différence entre chercher les vecteurs propres réels et chercher les vecteurs propres complexes ?

Retour à l’exercice ▲

Pour la matrice A_3, penser à utiliser j, racine cubique de l'unité.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.1

On obtient

$$\pi_A(s) = (s-1)^4$$

Chercher les vecteurs propres.

Retour à l'exercice ▲

– Si $a = 0$, les composantes x_1, x_2, x_3, x_4 des vecteurs propres doivent vérifier :

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

Attention, la famille génératrice que vous avez obtenue pour V_1 n'est pas forcément la même que celle proposée dans la solution.
Comment savoir dans ce cas si votre solution est correcte ?

– Si $a \neq 0$, les composantes x_1, x_2, x_3, x_4 des vecteurs propres doivent vérifier :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_2 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.1

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.1

Revoir l'exercice du chapitre précédent sur les déterminants des matrices triangulaires par blocs.

Retour à l'exercice ▲

Chercher à déterminer les vecteurs propres écrits par blocs.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.2

Si $A \in \mathcal{M}_{nn}$, on note $p_n(s) = \det(sI - A)$.
Trouver une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1}.

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$p_n(s) = s p_{n-1}(s) + \alpha_n.$$

Calculez $p_1, p_2, \ldots$ pour établir l'expression, que vous démontrerez ensuite par récurrence.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.2

On démontre par récurrence que : $p_n(s) = \alpha_n + \alpha_{n-1}s + \ldots + \alpha_k s^{n-k} + \ldots + s^n$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.2

Résoudre $AY = \lambda Y$, puis préciser $Y \neq 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.2

Montrer que l'on peut exprimer $y_2, y_3, \ldots, y_n$ en fonction de y_1. Penser à vérifier la dernière équation.

Retour à l'exercice ▲

En déduire que

$$Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \dots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}. \text{ avec } y_1 \neq 0.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.3

Voir le paragraphe "Valeur et vecteur propres d'une matrice".

Retour à l'exercice ▲

Que vaut $(A+\alpha I)Y$, A^2Y ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1a, Exercice A.2.4

On suppose que :

$$\begin{array}{rcl} AY & = & \lambda Y \\ Y & \neq & 0 \end{array}$$

et on montre que $\lambda^2 = -1$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1a, Exercice A.2.4

Utilisez l'exercice A.2.3et n'oubliez pas que $Y \neq 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.4

La matrice doit avoir une trace nulle, pourquoi ?
Le déterminant de la matrice vaut 1, pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.4

Utiliser 1(a) : les valeurs propres sont i et $-i$ donc la trace est nulle et on peut choisir les termes diagonaux nuls.
D'autre part, le déterminant vaut 1.
On peut donc choisir :

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -1/a & 0 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.4

Voir le paragraphe "Valeurs propres et matrices particulières".

Retour à l’exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.4

Est-il possible qu'une matrice de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ n'admette aucune valeur propre réelle ?
Voir l'exercice A.1.11.
On rappelle de plus que si $P \Rightarrow Q$, alors $nonQ \Rightarrow nonP$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1a, Exercice A.2.5

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1a, Exercice A.2.5

Utiliser le déterminant d'un produit de matrices.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.5

Voir le paragraphe "Valeur et vecteur propres d'une matrice".
On se place dans la cas d'une valeur propre non nulle (pourquoi ?).

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.5

On suppose que (λ, Y) $(\lambda \neq 0)$ est un couple propre de AB, écrire ce que cela signifie.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1b, Exercice A.2.5

Montrer que BY est vecteur propre de BA. Ne pas oublier de vérifier que $BY \neq 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.5

On peut utiliser la question 1(b).

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.5

Revoir la définition d'une famille libre.

Retour à l'exercice ▲

$X = 0 \Rightarrow AX = 0.$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2c, Exercice A.2.5

Revoir le chapitre 1.
Quelle inégalité existe entre le cardinal d'une famille libre et dimension d'un sous-espace vectoriel ?

Retour à l'exercice ▲

A et B jouent des rôles similaires.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

Revoir l'un des derniers exercices du chapitre 2 sur le rang d'une matrice XY^T.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4a, Exercice A.2.5

Utiliser la relation entre le nombre de colonnes, la dimension du noyau, le rang de A ...

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4b, Exercice A.2.5

Utiliser le résultat de la question 2.

Retour à l’exercice ▲

Aide 2, Question 4b, Exercice A.2.5

Le scalaire $X^T Y$ est valeur propre de la matrice XY^T.
Faites bien la différence entre scalaire et matrice.

Retour à l'exercice ▲

Comme précédemment le rang de A permet d'obtenir la dimension de Ker A.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 5a, Exercice A.2.5

On en déduit que $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_{n-1} = 0$,
c'est-à-dire que 0 est valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à $n-1$.
Que vaut μ_n ?

Retour à l'exercice ▲

On utilise la trace de A et on obtient que

$$\mu_n = \text{trace}\ A.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 5b, Exercice A.2.5

0 est valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à $n-1$, pourquoi ?
Est-il possible qu'il existe une valeur propre non nulle ?

Retour à l'exercice ▲

N'oubliez pas que la trace de A est nulle.
Montrez que 0 est valeur propre de multiplicité n.

Retour à l'exercice ▲

Etudier les cas trace $A = 0$ et trace $A \neq 0$.
Reprendre les questions (a) et (b).

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.6

Si y est vecteur propre de f que vaut $f(y)$?

Retour à l'exercice ▲

On a bien sûr $\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

On pourrait retrouver ce résultat par le calcul $\hat{A} = P^{-1}AP$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.6

Que vaut D^n quand D est une matrice diagonale ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.6

Pour savoir si B est l'inverse de A, il suffit de calculer le produit AB.
La réponse est oui, la relation précédente est encore valable pour $n = -1$.
Dans le cas particulier ici, rappeler l'expression de l'inverse d'une matrice à 2 lignes et 2 colonnes.

Retour à l'exercice ▲

Représenter matriciellement la relation de récurrence.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.2.6

Ecrire $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et itérer cette relation.

Retour à l'exercice ▲

Montrer que si $u_n = \frac{v_n}{w_n}$, avec v_n et w_n qui vérifient les relations de la question précédente, alors

$$u_{n+1} = \frac{-2u_n + 2}{u_n - 3}$$

On choisit $v_0 = u_0$, $w_0 = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 5, Exercice A.2.6

Utiliser la question précédente pour en déduire v_n et w_n donc u_n.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 5, Exercice A.2.6

On obtient

$$u_n = \frac{(u_0 - 2) + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 + 1)}{(2 - u_0) + \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 + 1)}$$

En déduire la limite de u_n.
Vous avez déjà étudié ces suites en MT21, les valeurs 2 et -1 sont les points fixes de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-2x + 2}{x - 3}$$

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Diagonalisation - condition nécessaire et suffisante" (le deuxième théorème).

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.7

Voir les paragraphes "Diagonalisation - condition suffisante" et "Diagonalisation - condition nécessaire et suffisante" (le deuxième théorème).

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.7

Calculer les sous-espaces propres et comparer la multiplicité des valeurs propres à la dimension des sous-espaces propres.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.7

Voir le paragraphe "Diagonalisation - condition nécessaire et suffisante".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.7

Calculer toutes les valeurs propres et les sous-espaces propres correspondants et raisonner cas par cas.

Retour à l'exercice ▲

Par exemple pour $\lambda = 0$ (valeur propre double) on montre que pour $a \neq 0$ le sous-espace propre est de dimension 1, donc A n'est pas diagonalisable...

Retour à l'exercice ▲

La réponse a été donnée dans le cours.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Trigonalisation d'une matrice".

Retour à l'exercice ▲

$A = \lambda I$. Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace propre - définition".

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous espace propre".

Retour à l'exercice ▲

Quelle est la dimension de V_λ ?

Retour à l'exercice ▲

La famille (Y, BY) est-elle liée ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.9

Est-ce que A est diagonalisable ?

Retour à l'exercice ▲

Lorsque A est diagonalisable, que peut-on dire sur les vecteurs propres de A ?

Retour à l'exercice ▲

Utiliser 2. pour conclure quant aux vecteurs propres de B.

Retour à l'exercice ▲

En déduire que B est diagonalisable.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.10

Revoir l'exercice A.2.8 et raisonner par l'absurde.

Retour à l'exercice ▲

λ est une valeur propre de multiplicité n.
Calculer les vecteurs propres et montrer que le sous-espace propre est de dimension 1.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.11

Penser au rang

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.11

Calculer les matrices $(A-I),(A-2I),(A-I)^2$, leur rang se calcule facilement.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1b, Exercice A.2.11

pour chacune des matrices la dimension du noyau plus le rang vaut 3, d'où le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.11

on a vu dans le chapitre 2 que

$$\mathrm{Ker}\,(A-I) \subset \mathrm{Ker}\,(A-I)^2.$$

Redémontrez cette inclusion.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2b, Exercice A.2.11

les dimensions de Ker $(A-I)$ et Ker $(A-I)^2$, sont différentes, donc l'inclusion est stricte.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2c, Exercice A.2.11

Que signifie y_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2c, Exercice A.2.11

On a

$$(A-I)((A-I)z) = 0, \ \ (A-I)z \neq 0.$$

Retour à l'exercice ▲

On a bien

$$A((A-I)z) = (A-I)z, \quad (A-I)z \neq 0.$$

Ce qui permet de conclure.

Retour à l'exercice ▲

Ecrire $a_1 y_1 + a_2 y_2 + az = 0$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.11

Si $a_1 y_1 + a_2 y_2 + az = 0$ alors $(A - I)(a_1 y_1 + a_2 y_2 + az) = 0$.
Que vaut $Ay_1,\ \ Ay_2,\ \ (A - I)z$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 3, Exercice A.2.11

$(A-I)(a_1 y_1 + a_2 y_2 + az)$ est une combinaison linéaire nulle des vecteurs y_1, y_2 qui sont linéairement indépendants : pourquoi ?
En déduire que a_2, a donc a_1 sont nuls.

Retour à l'exercice ▲

Calculer $u(e_1)$.
Quelles sont ses composantes sur la base (e_1, e_2, e_3) ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4a, Exercice A.2.11

Revoir le produit matriciel dans le chapitre 2.

$$u(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3.$$

On obtient ainsi la première colonne de la matrice.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 4a, Exercice A.2.11

On détermine les autres colonnes et on trouve finalement que la matrice associée à u quand on choisit la base canonique est A.

Retour à l'exercice ▲

Que vaut Ay_1, Ay_2, Az ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4b, Exercice A.2.11

$Ay_1 = y_1, \; Ay_2 = 2y_2, \; Az = z + y_1$ d'où la matrice.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 4b, Exercice A.2.11

la matrice est : $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Retour à l'exercice ▲

c'est évident, A et T sont les matrices de u quand on choisit sur $\mathscr{M}_{2,1}$ 2 s differentes

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Cayley-Hamilton".

Retour à l'exercice ▲

Procéder comme dans l'exemple du paragraphe.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 5, Exercice A.2.11

A partir de l'équation du polynôme caractéristique, calculer A^3 en fonction de A^2, A et I, puis multiplier le tout par A et réutiliser la même équation pour obtenir A^4 en fonction de A^2, A et I.

Retour à l'exercice ▲