

Exercices du chapitre 4 avec corrigé succinct

Exercice IV.1 Ch4-Exercice 1 : valeurs propres et vecteurs propres de l'identité

Quels sont les vecteurs propres de l'application identité Id_E ? Préciser les valeurs propres associées.

Solution : Tous les vecteurs, sauf le vecteur nul, sont vecteurs propres de l'identité, la valeur propre associée est 1.

Exercice IV.2 Ch4-Exercice 2 : vp de projection et rotation

On demande de répondre à cet exercice de façon intuitive, on verra plus loin comment l'aborder de façon plus systématique :

- Si u est la projection de l'espace sur un plan parallèlement à une droite, citer des vecteurs propres de u et les valeurs propres associées.
- Si u est la rotation du plan d'angle α :
 - quand $\alpha = \pi$, citer des vecteurs du plan qui sont vecteurs propres de u , préciser les valeurs propres associées,
 - quand $\alpha = \frac{\pi}{3}$, pouvez-vous citer des vecteurs du plan qui sont vecteurs propres de u ?

Solution :

- Pour la projection, les vecteurs non nuls du plan sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 1, les vecteurs non nuls de la droite sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.
 - Pour la rotation si :
 - $\alpha = \pi$, la rotation est alors une symétrie, tout vecteur non nul du plan est vecteur propre associé à la valeur propre -1 .
 - $\alpha = \frac{\pi}{3}$, on ne peut citer aucun vecteur propre.
-

Exercice IV.3 Ch4-Exercice 3 : stabilité par mult. par un scalaire des vecteurs propres

Montrer que si Y est vecteur propre de A , alors αY est vecteur propre de A (pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul).

Solution : $\alpha Y \neq 0$ et $A(\alpha Y) = \alpha(A Y) = \alpha \lambda Y = \lambda(\alpha Y)$, donc αY est vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Exercice IV.4 Ch4-Exercice 4 : vp de matrice diagonale, inversibilité et vp nulle

1. Soit I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}$, déterminer ses vecteurs propres et ses valeurs propres.
2. — Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 5.2 & 0 \\ 0 & 0 & 6.9 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice diagonale.
3. Montrer que : A non inversible $\iff 0$ est valeur propre de A .

Solution :

1. Tout vecteur non nul Y est vecteur propre de I , car $IY = Y$: la valeur propre associée est 1.
2. — Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $AY = \begin{pmatrix} 3.5y_1 \\ 5.2y_2 \\ 6.9y_3 \end{pmatrix} = \lambda Y \iff \begin{cases} 3.5y_1 = \lambda y_1 \\ 5.2y_2 = \lambda y_2 \\ 6.9y_3 = \lambda y_3 \end{cases}.$

Ce système admet comme solutions :

- $\lambda = 3.5$: $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ et y_1 quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) : $Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 - $\lambda = 5.2$: $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ et y_2 quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) : $Y = y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 - $\lambda = 6.9$: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ et y_3 quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) : $Y = y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Ce résultat se généraliserait au cas d'une matrice diagonale quelconque : $\lambda = a_{ii}$ est valeur propre, les vecteurs propres associés sont proportionnels à la i^e colonne de I . On a en effet d'après les propriétés du produit matriciel : $AI = A \implies \forall i = 1, \dots, n : AI_i = A_i = a_{ii}I_i$, donc $A(\alpha I_i) = \alpha AI_i = \alpha a_{ii}I_i = a_{ii}(\alpha I_i)$.
On a donc un couple propre $(a_{ii}, \alpha I_i)$, si $\alpha \neq 0$.
On retrouve sur ces exemples très simples que si Y est vecteur propre associé à λ , alors αY ($\alpha \neq 0$) est également vecteur propre associé à λ .
3. A non inversible $\iff \exists Y \neq 0$ et $AY = 0$,
En effet le système $AY = 0$ admet toujours la solution nulle, et ce système admet une solution non nulle (c'est-à-dire n'admet pas de solution unique) si et seulement si A n'est pas inversible. On a donc :
 A non inversible $\iff 0$ est valeur propre de A .

Exercice IV.5 Ch4-Exercice 5 : vp réelles et complexes de matrices 2×2 et 3×3

- Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres réels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) des matrices :
 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
 $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) des matrices précédentes puis de la matrice : $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i+1 & 2i \end{pmatrix}$.

Solution : Il vient :

1. Pour A_1 : $\Pi_A(s) = (s+1)(s+2) - 2 = s^2 + 3s = s(s+3)$.

Deux valeurs propres simples 0 et -3 .

Recherche des vecteurs propres :

— $\lambda = 0$: $(A - \lambda I)Y = 0 \iff -y_1 + 2y_2 = 0 \iff y_1 = 2y_2 \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

— $\lambda = -3$: $(A - \lambda I)Y = 0 \iff 2y_1 + 2y_2 = 0 \iff y_1 = -y_2 \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Il était prévisible que 0 est valeur propre de cette matrice. En effet, puisque ses 2 colonnes sont proportionnelles, elle n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre.

2. Pour A_2 : $\Pi_A(s) = (s+1)(s+2) - 2 = s^2 + 3s = s(s+3)$.

On obtient le même polynôme caractéristique que pour la matrice A_1 . Ce résultat est général : les matrices sont transposées l'une de l'autre.

Recherche des vecteurs propres :

— $\lambda = 0$: $(A - \lambda I)Y = 0 \iff -y_1 + y_2 = 0 \iff y_1 = y_2 \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

— $\lambda = -3$: $(A - \lambda I)Y = 0 \iff 2y_1 + y_2 = 0 \iff y_2 = -2y_1 \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

On remarque en revanche que les vecteurs propres ne sont pas les mêmes que pour la matrice A_1 .

Dans $\mathbb{C}$: si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_1 et A_2 , on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes). Quant aux vecteurs propres, ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients α complexes.

3. Pour $A_3 : \Pi_A(s) = (s-1)^2 + 1$.

Il n'existe pas de valeurs propres réelles.

Dans $\mathbb{C}$: i on cherche les valeurs propres complexes, on obtient 2 valeurs propres complexes $1+i$ et $1-i$ (on peut remarquer que ces valeurs propres sont conjuguées : ce résultat est général, on le démontrera ultérieurement).

Recherche des vecteurs propres :

$$- \lambda = 1+i : (A - \lambda I)Y = 0 \iff -iy_1 - y_2 = 0 \iff y_2 = -iy_1 \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}.$$

$$- \lambda = 1-i : (A - \lambda I)Y = 0 \iff -iy_1 + y_2 = 0 \iff y_2 = iy_1 \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}.$$

4. Pour $A_4 : \Pi_A(s) = s(s-2) + 1 = s^2 - 2s + 1 = (s-1)^2$.

On a une valeur propre double $\lambda = 1$

Recherche des vecteurs propres :

$$- \lambda = 1 : (A - \lambda I)Y = 0 \iff -y_1 - y_2 = 0 \iff y_1 = -y_2 \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dans $\mathbb{C}$: si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_4 , on obtient bien sûr la même valeur propre (réelle donc complexe), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, donc on choisit les coefficients α complexes.

5. Pour $A_5 : \Pi_A(s) = (s-1)^2(s-2)$.

$\lambda = 1$ est valeur propre double, $\lambda = 2$ est valeur propre simple.

Recherche des vecteurs propres :

$$- \lambda = 1 : (A - \lambda I)Y = 0 \iff y_3 = 0 \iff Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$- \lambda = 2 : (A - \lambda I)Y = 0 \iff \begin{cases} -y_1 + y_3 = 0 \\ -y_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y_1 = y_3 \\ y_2 = 0 \end{cases} \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

6. Pour $A_6 : \Pi_A(s) = (s-1)^2(s-2)$.

$\lambda = 1$ est valeur propre double, $\lambda = 2$ est valeur propre simple.

Recherche des vecteurs propres :

$$- \lambda = 1 : (A - \lambda I)Y = 0 \iff \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$- \lambda = 2 : (A - \lambda I)Y = 0 \iff \begin{cases} -y_1 + y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dans $\mathbb{C}$: si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_5 et A_6 , on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients α complexes.

7. Pour $A_7 : \Pi_A(s) = (s-1)(s-2)(s+1)$.

1, 2, -1 sont valeurs propres simples.

Recherche des vecteurs propres :

$$\begin{aligned}
- \lambda = 1 : (A - \lambda I)Y = 0 &\iff \begin{cases} y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 + 3y_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}. \\
- \lambda = 2 : (A - \lambda I)Y = 0 &\iff \begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_3 = 0 \end{cases} \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}. \\
- \lambda = -1 : (A - \lambda I)Y = 0 &\iff \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_2 + 3y_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -y_3 \end{cases} \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

On démontrera plus tard la propriété que l'on vient de constater sur les matrices A_5, A_6, A_7 : les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale.

Dans $\mathbb{C}$: si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_7 , on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, donc on choisit les coefficients α complexes.

8. Pour $A_8 : \Pi_A(s) = (s-1)(s-2i) - (i+1) = s^2 + s(-1-2i) + i-1 = (s-i-1)(s-i)$.

On obtient 2 valeurs propres complexes $1+i$ et i .

Recherche des vecteurs propres :

$$\begin{aligned}
- \lambda = 1+i : (A - \lambda I)Y = 0 &\iff -iy_1 + y_2 = 0 \iff y_2 = iy_1 \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}. \\
- \lambda = i : (A - \lambda I)Y = 0 &\iff (1-i)y_1 + y_2 = 0 \iff y_2 = (i-1)y_1 \iff Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Exercice IV.6 Ch4-Exercice 6 : vp de matrices triangulaires

Démontrer la propriété suivante :

si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont ses termes diagonaux.

Solution : Si A est triangulaire, il en est de même pour $sI - A$, donc $\det(sI - A)$ est le produit des termes diagonaux, c'est-à-dire :

$$\Pi_A(s) = \prod_{k=1}^n (s - a_{kk}),$$

d'où les racines évidentes.

Exercice IV.7 Ch4-Exercice 7 : vp de matrice conjuguée dans R et dans $\mathbb{C}$

Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$:

$$[\lambda \text{ valeur propre de } A] \iff [\bar{\lambda} \text{ valeur propre de } \bar{A}] \quad (\text{avec la même multiplicité}).$$

2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, alors :

$$[\lambda \text{ valeur propre de } A] \iff [\bar{\lambda} \text{ valeur propre de } A] \quad (\text{avec la même multiplicité}).$$

Solution :

1.

$$\Pi_A(s) = \det(sI - A) = \overline{\det(\bar{s}I - \bar{A})} = \overline{\Pi_{\bar{A}}(\bar{s})}.$$

On en déduit donc la propriété suivante :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \Pi_A(\lambda) = 0 \iff \Pi_{\bar{A}}(\bar{\lambda}) = 0 \iff \bar{\lambda} \text{ valeur propre de } \bar{A}.$$

2. On utilise la question précédente : si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, alors $A = \bar{A}$. Donc si λ est valeur propre de A , $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de A (on a constaté cette propriété pour la matrice A_3 de l'Exercice A.1.5).

Exercice IV.8 Ch4-Exercice 8 : vecteurs propres de la transposée

Les matrices A et A^T ont-elles les mêmes vecteurs propres?

Solution : Les matrices A et A^T n'ont pas les mêmes vecteurs propres, voir les matrices A_1 et A_2 de l'Exercice A.1.5.

Exercice IV.9 Ch4-Exercice 9 : vp de matrices semblables, cas 2×2

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. On peut vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit $B = P^{-1}AP$.

Calculer B , ses valeurs propres et ses vecteurs propres, comparer avec ceux de A .

Qu'en pensez-vous?

Solution : On obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 33 & 72 \\ -12 & -26 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6 \quad \text{et} \quad Y_1 = \alpha \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}, Y_2 = \alpha \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On avait déjà calculé les valeurs et vecteurs propres de la matrice A dans le paragraphe "Polynôme caractéristique". A et B ont les mêmes valeurs propres 1 et 6. Les vecteurs propres de A étaient :

$$X_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, X_2 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de A et B ne sont pas les mêmes, mais on a les relations de changement de base

$$Y_1 = P^{-1}X_1, \quad Y_2 = P^{-1}X_2.$$

Exercice IV.10 Ch4-Exercice 10 : somme des multiplicités

Vérifier sur les matrices de l'Exercice A.1.5 que $\sum_{i=1}^p r_i = n$ (notations de la Proposition 4.2.1).

Exercice IV.11 Ch4-Exercice 11 : vrai/faux sur les vp réelles/complexes, D'Alembert

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre réponse à l'aide de démonstrations, d'exemples ou de contre-exemples selon le cas.

1. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres réelles.
2. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent 2 valeurs propres réelles.
3. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ qui admettent 2 valeurs propres réelles.
4. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres complexes distinctes ou non.
5. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent 1 valeur propre réelle et 1 valeur propre complexe non réelle.
6. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent 1 seule valeur propre réelle simple.
7. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ qui n'admettent pas de valeur propre réelle.

Solution : Dans cet exercice, on fait référence aux matrices de l'Exercice A.1.5.

1. FAUX : voir la matrice A_3 .
2. VRAI : prendre par exemple la matrice A_1 .
3. VRAI : on peut prendre comme précédemment la matrice A_1 , ou si l'on cherche une matrice à coefficients complexes non réels, on peut prendre $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1-i & -i \\ i & 1+i \end{pmatrix}$.

4. VRAI : $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ (voir le paragraphe “Valeurs propres - existence et multiplicité”).
 5. FAUX : une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres complexes (éventuellement confondues, éventuellement réelles). Mais si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, sont valeurs propres de A , alors $\overline{\lambda_2}$ est également valeur propre de A , or comme λ_2 n'est pas réelle, $\overline{\lambda_2}$ n'est pas réelle donc différente de λ_1 , de plus $\overline{\lambda_2} \neq \lambda_2$. On aurait donc une matrice ($\in \mathcal{M}_{2,2}$) avec 3 valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \overline{\lambda_2}$, ce qui est impossible.
 6. FAUX : si $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$, donc A admet 2 valeurs propres complexes, or A a une seule valeur propre réelle simple, donc la 2^e valeur propre serait non réelle et on serait ramené à 5.
 7. FAUX : les valeurs propres complexes non réelles vont par 2 (les 2 complexes conjugués) et 3 n'est pas un multiple de 2!
-

Exercice IV.12 Ch4-Exercice 12 : trace et déterminant, somme et produit des vp

Vérifier sur les matrices de l'Exercice A.1.5 que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres et que son déterminant est le produit de ses valeurs propres.

Solution :

1. $\text{Tr}(A_1) = -3 = 0 + (-3)$, $\det A_1 = 0 = 0 \times (-3)$,
 2. A_2 : comme A_1 ,
 3. $\text{Tr}(A_3) = 2 = (1 + i) + (1 - i)$, $\det A_3 = 2 = (1 + i) \times (1 - i)$,
 4. $\text{Tr}(A_4) = 2 = 1 + 1$, $\det A_4 = 1 = 1 \times 1$,
 5. $\text{Tr}(A_5) = 4 = 1 + 1 + 2$, $\det A_5 = 2 = 1 \times 1 \times 2$,
 6. A_6 : comme A_5 ,
 7. $\text{Tr}(A_7) = 2 = 1 + 2 + (-1)$, $\det A_7 = -2 = 1 \times 2 \times (-1)$,
 8. $\text{Tr}(A_8) = 2i + 1 = (1 + i) + i$, $\det A_8 = i - 1 = (1 + i) \times i$.
-

Exercice IV.13 Ch4-Exercice 13 : sous espace propre

On définit :

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1} \mid AY = \lambda Y\}.$$

Montrer que : V_λ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}$.

Solution : On montre que :

$V_\lambda \neq \emptyset$, car $0 \in V_\lambda$,

V_λ est stable par combinaison linéaire : Y_1 et $Y_2 \in V_\lambda$ implique que $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \in V_\lambda$.

On pourrait aussi montrer que $V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$ et $A - \lambda I$ est une application linéaire.

Exercice IV.14 Ch4-Exercice 14 : sous espaces propres d'une projection dans R^3

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reprendre les calculs qui ont déjà été faits dans le paragraphe “Valeur et vecteur propres d'une matrice” pour donner une base de V_0 et V_1 .

Solution : Une base de V_0 est $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, V_0 est de dimension 1.

Une base de V_1 est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, V_1 est de dimension 2.

Exercice IV.15 Ch4-Exercice 15 : multiplicité des vp et dimension des seV propres

Reprendre les matrices de l'Exercice A.1.5 dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour chacune d'elles, donner la multiplicité r_i de chacune de ses valeurs propres λ_i et préciser la dimension d_i du sous espace propre V_{λ_i} . Vérifier l'inégalité entre r_i et d_i .

Solution :

1. pour $\lambda = 0 : r = 1$ et $d = 1$; pour $\lambda = -3 : r = 1$ et $d = 1$,
2. pour $\lambda = 0 : r = 1$ et $d = 1$; pour $\lambda = -3 : r = 1$ et $d = 1$,
3. pour $\lambda = 1 + i : r = 1$ et $d = 1$; pour $\lambda = 1 - i : r = 1$ et $d = 1$,
4. pour $\lambda = 1 : r = 2$ et $d = 1$,
5. pour $\lambda = 1 : r = 2$ et $d = 2$; pour $\lambda = 2 : r = 1$ et $d = 1$,
6. pour $\lambda = 1 : r = 2$ et $d = 1$; pour $\lambda = 2 : r = 1$ et $d = 1$,
7. pour $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1 : r = 1$ et $d = 1$,
8. pour $\lambda = 1 + i : r = 1$ et $d = 1$; pour $\lambda = i : r = 1$ et $d = 1$.

Exercice IV.16 Ch4-Exercice 16 : matrice semblable à diagonale et vp

Montrer que si $A = PDP^{-1}$, où la matrice D est diagonale, alors les colonnes de P sont vecteurs propres de A et les éléments de la diagonale de D sont les valeurs propres de A .

Solution : On a

$$A = PDP^{-1} \iff AP = PD \iff \forall i = 1, \dots, n, AP_i = PD_i = d_{ii}P_i.$$

Ce que l'on vient d'écrire découle uniquement des propriétés du produit matriciel, on a bien sûr utilisé de plus le fait que D est diagonale.

On obtient donc que P_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre d_{ii} .

Exercice IV.17 Ch4-Exercice 17 : diagonalisabilité de matrices

Les matrices de l'Exercice A.1.5 sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

Si oui, donner une matrice D diagonale et une matrice P régulière telles que $D = P^{-1}AP$.

Solution :

- Les matrices A_1, A_2, A_7 sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, donc dans $\mathbb{C}$, puisqu'elles admettent n valeurs propres distinctes. On a

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, D_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme on l'a vu, une matrice P possible est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres, donc par exemple :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice A_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (ses valeurs propres sont distinctes),

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

- Les matrices A_4, A_6 ne sont pas diagonalisables (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$), car la valeur propre 1 a pour multiplicité 2 et la dimension de V_1 est égal à 1, donc $d < r$.

— La matrice A_5 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, car

$$r_1 = d_1 = 2, \quad r_2 = d_2 = 1, \quad \sum_{k=1}^2 r_k = 3, \quad D_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice IV.18 Ch4-Exercice 18 : matrice nulle sur une base

Soit $B \in \mathcal{M}_{n,n}$ et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ un vecteur non nul. Est-ce que $BX = 0 \implies B = 0$?

Montrer que si $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}$, alors

$$BX_i = 0, \forall i = 1, \dots, n \iff B = 0.$$

Solution : La réponse est NON!

Le fait que $BX = 0$ implique seulement que X est dans le noyau de B , pas que B est nulle.

Pour bien fixer les idées, prenons un contre-exemple :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \quad BX = 0, \text{ et pourtant } B \neq 0 \text{ et } X \neq 0.$$

En revanche, si $BX_i = 0$ pour tous les vecteurs X_i d'une base $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_{n,1}$, on obtient que $BX = 0$ pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}$ (il suffit de décomposer X sur la base $\mathcal{E}$).

Ensuite, si on choisit successivement pour X les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}$, on obtient que toutes les colonnes de B sont nulles, donc B est nulle.

Exercice IV.19 Ch4-Exercice 19 : inverse par Cayley-Hamilton

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ telle que $\Pi_A(s) = s^n - 1$. Donner A^{-1} en fonction de A .

Solution : D'après Cayley-Hamilton, $A^n - I = 0$, donc $AA^{n-1} = I$ et l'inverse de A est A^{n-1} .
