

Exercices du chapitre 5 avec corrigé succinct

Exercice V.1 Ch5-Exercice 1 : produit scalaire par 0

- Montrer que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$.
- Montrer que $\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = 0$ et que donc, en particulier, $\vec{x} = \vec{0} \implies \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$.

Solution :

- Dans la définition on a

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \implies \vec{x} = \vec{0},$$

donc en utilisant la contraposée :

$$\vec{x} \neq \vec{0} \implies \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \neq 0,$$

mais puisque

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$$

on a donc :

$$\vec{x} \neq \vec{0} \implies \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0.$$

- La bilinéarité et la symétrie entraînent

$$\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = 0$$

(revoir comment on a démontré que $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ lorsque u est linéaire).

Exercice V.2 Ch5-Exercice 2 : produit scalaire sur R^n avec un poids diagonal positif

Montrer que si $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sont des réels strictement positifs, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i y_i$ définit bien un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. Que se passe-t-il si $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ne sont plus des réels strictement positifs?

Solution :

- On vérifie la bilinéarité.
- On a

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i^2 \geq 0, \text{ puisque } \gamma_i > 0 \text{ et } x_i^2 \geq 0.$$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \gamma_i x_i^2 = 0 \forall i = 1, \dots, n \iff x_i = 0 \forall i = 1, \dots, n \iff \vec{x} = \vec{0}.$$

Si les γ_i ne sont pas strictement positifs, prenons par exemple $n = 2$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$. On a alors

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 - x_2^2,$$

donc $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ n'est pas positif ou nul pour tout $\vec{x}$, on peut prendre pour s'en convaincre $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Si tous les γ_i sont positifs ou nuls, par exemple $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$. On a alors

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2,$$

il n'est plus possible d'avoir $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$, mais on peut avoir $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$, prendre par exemple $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

D'une façon plus générale, quand les γ_i sont seulement positifs ou nuls on peut avoir $\gamma_i x_i^2 = 0$ sans que $x_i = 0$.

Exercice V.3 Ch5-Exercice 3 : produit scalaire : échange de position et transposition

Montrer la proposition :

Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, alors $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ vérifie :

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle x, A^T y \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m, \quad (1.1)$$

(le produit scalaire du membre de gauche est dans $\mathbb{R}^m$ et celui de droite dans $\mathbb{R}^n$).

Solution : On applique la définition $\langle x, y \rangle = x^T y$, on obtient :

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{R}^m} = (Ax)^T y = x^T A^T y = \langle x, A^T y \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Exercice V.4 Ch5-Exercice 4 : produit scalaire du plan et cosinus

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire usuel est défini par $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$, où θ est l'angle entre les 2 vecteurs. Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cas particulier.

Solution : On obtient $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \cos^2 \theta \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$.

Or $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, $\|\vec{y}\|^2 = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$.

Ce qui termine de démontrer la propriété.

Exercice V.5 Ch5-Exercice 5 : norme infinie sur $\mathbb{R}^n$

Montrer que dans $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les composantes de x , définit une norme. On appelle cette norme la norme infinie et on la note $\|\cdot\|_\infty$.

Solution :

- $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0 \iff x_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \iff \vec{x} = \vec{0}$.
- $\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha x_i| = \max_{1 \leq i \leq n} (|\alpha| |x_i|) = |\alpha| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
- Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors $|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$, qui est une constante par rapport à j .
Donc, comme c'est vrai pour tout j , le "max" reste inférieur à cette constante, et on a bien

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|.$$

Les propriétés d'une norme sont donc vérifiées.

Exercice V.6 Ch5-Exercice 6 : orthogonal : sous-espace vectoriel, supplémentaire

Vérifier que $F^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel et montrer que $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$.

Solution :

- On vérifie que $\vec{0}$ appartient bien à $F^\perp$ et que si $\vec{x}_1 \in F^\perp$ et $\vec{x}_2 \in F^\perp$, alors $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 \in F^\perp$. $F^\perp$ est stable, donc c'est un sous-espace vectoriel.
- $\left. \begin{array}{l} \vec{x} \in F^\perp \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \quad \forall \vec{y} \in F \\ \vec{x} \in F \end{array} \right\} \text{ donc } \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}, \text{ donc } F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}.$

Exercice V.7 Ch5-Exercice 7 : vecteurs orthogonaux non nuls : libres

Montrer qu'une famille de vecteurs orthogonaux non nuls est une famille libre.

Solution : Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une famille orthogonale. Supposons que

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_p \vec{x}_p = \vec{0},$$

alors, en fixant un $i \in \{1, \dots, p\}$, en effectuant le produit scalaire avec $\vec{x}_i$ on a :

$$\langle \vec{x}_i, \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_p \vec{x}_p \rangle = 0,$$

et en utilisant la bilinéarité, on obtient

$$\alpha_1 \langle \vec{x}_i, \vec{x}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \vec{x}_i, \vec{x}_2 \rangle + \dots + \alpha_p \langle \vec{x}_i, \vec{x}_p \rangle = 0.$$

Puisque la famille est orthogonale, $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0$ pour $j \neq i$, donc on obtient

$$\alpha_i \langle \vec{x}_i, \vec{x}_i \rangle = 0,$$

or $\vec{x}_i \neq \vec{0}$ donc $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_i \rangle \neq 0$ donc $\alpha_i = 0$. Ce que l'on vient de faire est valable $\forall i = 1, \dots, p$, donc la famille est libre.

Exercice V.8 Ch5-Exercice 8 : orthonormalisation de Schmidt sur R^3

Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour construire la famille $\mathcal{Y}$ associée à la famille $\mathcal{X} =$

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \text{ avec } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : Étape 1 :

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Étape 2 :

$$\beta = -\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \beta \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Étape 3 :

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2, \quad \text{avec } \beta_1 = -\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle = -\sqrt{2}, \beta_2 = -\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle = -\frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir $\vec{y}_3$, on peut écrire $\vec{y}_3 = \frac{1}{\|\vec{y}_3\|} \vec{y}_3^*$, ou, ce qui est équivalent mais plus facile à calculer,

$$\vec{y}_3 = \frac{1}{\|\vec{y}_3^*\|} \vec{y}_3^*, \text{ avec } \vec{y}_3^* = 3\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice V.9 Ch5-Exercice 9 : orthogonal d'un sous-espace dans $\mathbb{R}^3$

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\vec{y} = (1, -2, 1)$, $F = \text{Vect}\langle \vec{y} \rangle$.

Alors on a vu que $F^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. $F^\perp$ est donc un plan dont $(2, 1, 0)$ et $(1, 0, -1)$ constituent par exemple une base. Montrer directement dans ce cas particulier que $E = F \oplus F^\perp$.

Solution : Si on note $\vec{x}_1 = (2, 1, 0)$, $\vec{x}_2 = (1, 0, -1)$, alors $(\vec{y}, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On peut alors montrer facilement que $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$ et que $\mathbb{R}^3 = F + F^\perp$.

Exercice V.10 Ch5-Exercice 10 : exemple de matrice orthogonale de taille 4

Montrer que la matrice Q définie par

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est orthogonale. Quelle est l'inverse de Q ? Que vaut le déterminant de Q ?

Solution : On vérifie que

$$\begin{aligned} (Q_1)^T Q_1 &= 1, (Q_1)^T Q_2 = 0, (Q_1)^T Q_3 = 0, (Q_1)^T Q_4 = 0, \\ (Q_2)^T Q_2 &= 1, (Q_2)^T Q_3 = 0, (Q_2)^T Q_4 = 0, \\ (Q_3)^T Q_3 &= 1, (Q_3)^T Q_4 = 0, \\ (Q_4)^T Q_4 &= 1. \end{aligned}$$

Donc $Q^T Q = I$, donc $Q^{-1} = Q^T$.

On calcule $\det Q = -1$.

Exercice V.11 Ch5-Exercice 11 : chgt de BON, matrice de passage orthogonale

On définit sur $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire usuel. Soit $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$, montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. Montrer que la base $\mathcal{B}'$ définie par

$$\mathcal{B}' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right)$$

est une base orthonormée. Que vaut P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$?

Vérifier que $PP^T = P^T P = I$.

Solution : On vérifie que :

$$\begin{aligned} \|\vec{e}_1\| &= 1, \|\vec{e}_2\| = 1, \|\vec{e}_3\| = 1, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0, \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0, \\ \|\vec{e}'_1\| &= 1, \|\vec{e}'_2\| = 1, \|\vec{e}'_3\| = 1, \langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 \rangle = 0, \langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_3 \rangle = 0, \langle \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage. Lorsque l'on effectue $P^T P$, on effectue les mêmes calculs que pour calculer les normes $\|\vec{e}'_1\| \dots$ et les produits scalaires $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_3 \rangle \dots$, on trouve donc que $P^T P = I$. En effectuant PP^T , on obtient à nouveau $PP^T = I$, c'est normal car $P^T P = I \Rightarrow P^{-1} = P^T$ et donc $PP^T = PP^{-1} = I$.

Exercice V.12 Ch5-Exercice 12 : inverse de matrice orthogonale

Quel est l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} ?$$

Que vaut son déterminant?

Solution : C'est la matrice P de l'exercice précédent, c'est une matrice de passage entre 2 bases orthonormées, elle est donc orthogonale donc $P^{-1} = P^T$, et on calcule $\det(P) = 1$ (en fait on peut montrer que lorsque la base est orthonormée directe $\vec{e}'_3 = \vec{e}'_1 \wedge \vec{e}'_2$, alors $\det(P) = 1$, et sinon $\det(P) = -1$).

Exercice V.13 Ch5-Exercice 13 : chgt de BON, calcul des composantes

Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On définit la base

$$\mathcal{B}' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right)$$

et on note $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, le vecteur x dans cette nouvelle base $\mathcal{B}'$ (et idem pour y).

Calculer

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2,$$

puis

$$x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3.$$

Solution : On a $x' = P^{-1}x = P^T x$, d'où

$$x'_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}}, x'_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, x'_3 = \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} (x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \\ x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{cases}$$

Ceci était prévisible puisque $x' = Qx$, or $Q = P^T$ est orthogonale, donc

$$\begin{aligned} \|x'\|^2 &= (x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 = \|Qx\|^2 = x^T Q^T Q x = x^T x = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \\ &= \|x\|^2, \\ \langle x', y' \rangle &= x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3 = \langle Qx, Qy \rangle = y^T Q^T Q x = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Exercice V.14 Ch5-Exercice 14 : valeurs propres distinctes : vect. propres orthogonaux

Soit A une matrice symétrique réelle, λ_1 et λ_2 deux valeurs propres réelles distinctes, dont on note y_1 et y_2 deux vecteurs propres réels associés.

1. Exprimer $\langle Ay_1, y_2 \rangle$ à l'aide de $\langle y_1, y_2 \rangle$.
2. Exprimer $\langle y_1, Ay_2 \rangle$ à l'aide de $\langle y_1, y_2 \rangle$.
3. En déduire que $\langle y_1, y_2 \rangle = 0$.

Solution :

1. $\langle Ay_1, y_2 \rangle = \lambda_1 \langle y_1, y_2 \rangle$.
2. $\langle y_1, Ay_2 \rangle = \lambda_2 \langle y_1, y_2 \rangle$.
3. Or $\langle Ay_1, y_2 \rangle = \langle y_1, A^T y_2 \rangle = \langle y_1, Ay_2 \rangle$.

Donc

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle y_1, y_2 \rangle = 0.$$

Puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on obtient

$$\langle y_1, y_2 \rangle = 0.$$

Exercice V.15 Ch5-Exercice 15 : diagonalisation d'une matrice symétrique réelle 3×3

Calculer les valeurs propres et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution : On a : $\det(sI - A) = (s - 6)^2 s$. A admet donc 2 valeurs propres (réelles) $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 6$. On calcule les vecteurs propres :

— les composantes de Y_0 doivent vérifier $y_1 = y_2 = y_3$; d'où un vecteur propre normé possible :

$$Y_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

— les composantes de Y_1 doivent vérifier $y_1 + y_2 + y_3 = 0$; d'où :

$$Y_1 = y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on obtient 2 vecteurs propres qui constituent une base de V_{λ_1} à savoir

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces 2 vecteurs ne sont pas normés, ils ne sont pas orthogonaux entre eux, en revanche X_1 et Y_0 sont orthogonaux, il en est de même pour X_2 et Y_0 . On va utiliser le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour construire à partir de X_1 et X_2 , 2 vecteurs orthonormés Y_1^* et Y_2^* .

On peut remarquer en effet qu'avec ce procédé on reste dans l'espace vectoriel V_{λ_1} donc que les vecteurs Y_1^*, Y_2^* sont également des vecteurs propres associés à λ_1 .

$$Y_1^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{Y}_2 = X_2 - \langle X_2, Y_1^* \rangle Y_1^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Y_2^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc la base orthonormée de vecteurs propres :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\},$$

le premier vecteur est associé à λ_0 , les 2 derniers sont associés à λ_1 .

Exercice V.16 Ch5-Exercice 16 : termes diagonaux d'une matrice sym. DP / semi-DP

Montrer que si une matrice est symétrique définie positive, ses termes diagonaux sont strictement positifs (calculer $x^T A x$ avec un vecteur x judicieusement choisi).

Montrer que si une matrice est symétrique semi-définie positive, ses termes diagonaux sont positifs ou nuls.

Solution : Choisissez successivement pour x les vecteurs de la base canonique, on a alors $e_i^T A e_i = a_{ii}$, d'où la conclusion.

Exercice V.17 Ch5-Exercice 17 : A semi-DP et valeurs propres positives

Démontrer la proposition suivante :

Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A symétrique soit semi-définie positive est que toutes ses valeurs propres soient positives ou nulles.

Solution : On a : $x^T A x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i (\tilde{x}_i)^2 \geq 0 \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$,

donc si toutes les valeurs propres sont positives ou nulles, on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (\tilde{x}_i)^2 \geq 0,$$

donc $x^T A x \geq 0$ donc la matrice est symétrique semi-définie positive.

Réciproquement, si la matrice est symétrique semi-définie positive, on a $x^T A x \geq 0 \forall x$ donc

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (\tilde{x}_i)^2 \geq 0 \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n,$$

donc en particulier si on choisit $\tilde{x}$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient $\lambda_1 \geq 0$. De même on obtient que chacun des λ_i est positif ou nul, en choisissant pour $\tilde{x}$ chacun des vecteurs de la base canonique.

Exercice V.18 Ch5-Exercice 18 : matrice symétrique 3×3 : DP, semi-DP?

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

est-elle définie positive? Semi-définie positive? Calculer $x^T Ax$.

Solution : La matrice est semi-définie positive puisque toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles (voir l'exercice V.15). Elle n'est pas définie positive, puisque ses valeurs propres ne sont pas strictement positives. On obtient :

$$x^T Ax = 4(x_1)^2 + 4(x_2)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Exercice V.19 Ch5-Exercice 19 : matrice symétrique DP inversible

Montrer qu'une matrice symétrique définie positive est inversible.

Le résultat est-il toujours valable si la matrice est semi-définie positive? Si oui démontrez-le, si non trouvez un contre exemple.

Solution :

DP : Si A est définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives, donc 0 n'est pas valeur propre, donc A est inversible.

Ou bien directement : si $x \in \text{Ker } A$, alors $Ax = 0$, donc $x^T Ax = x^T 0 = 0$ et ceci implique que $x = 0$ (A est définie). Donc A est injective, et, étant carrée, elle est bijective.

semi-DP : Si on définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cette matrice est semi-définie positive puisque ses valeurs propres sont positives ou nulles, mais elle n'est pas inversible.

Ou bien : on voit en prenant $x = e_2 = (0, 1)^T$ que $(e_2)^T Ae_2 = 0$ et $e_2 \neq 0$, et donc A est semi-DP. On remarque aussi que $\text{Ker } A = \text{Vect}\langle e_2 \rangle \neq 0$, donc A n'est pas inversible.

Exercice V.20 Ch5-Exercice 20 : lien matrice symétrique / forme quadratique

— On définit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 7 & 11 \\ 5 & 11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Calculer $q(x) = x^T Ax$ et montrer que q est une forme quadratique.

— On définit la forme quadratique $q(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 9x_1x_3 - 15x_2x_3$.

Déterminer une matrice symétrique A telle que $q(x) = x^T Ax$.

Solution :

— $q(x) = 3(x_1)^2 + 7(x_2)^2 + 13(x_3)^2 - 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 22x_2x_3$.

— $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{9}{2} \\ -2 & 5 & -\frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} & -\frac{15}{2} & -7 \end{pmatrix}.$

Exercice V.21 Ch5-Exercice 21 : formes quadratiques DP, semi-DP

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, on définit les formes quadratiques suivantes :

— $q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

— $q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$,

— $q_3(x) = x_1^2 + x_3^2$.

Pour chacune d'entre elles, dire si elle est définie-positive, semi-définie positive. Donner la matrice associée dans chacun des cas.

Solution :

$$— q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0, \forall x.$$

D'autre part si $q_1(x) = 0$ alors $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

C'est une forme quadratique définie positive.

$$— q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Si $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = 1$, alors $q_2(x) = -1$, donc q_2 n'est ni définie positive, ni semi-définie positive

$$— q_3(x) = x_1^2 + x_3^2 \geq 0, \forall x. \text{ Donc } q_3 \text{ est semi-définie positive.}$$

En revanche, si $x_1 = x_3 = 0$ et $x_2 = 1$, alors $q_3(x) = 0$ alors que $x \neq 0$, donc q_3 n'est pas définie positive.

Les matrices associées sont égales dans chacun des cas à :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces 3 matrices sont diagonales, leurs valeurs propres sont donc respectivement $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, et $(1, 0, 1)$, et on retrouve la caractérisation de matrice définie positive ou semi-définie positive à l'aide du signe des valeurs propres.

Exercice V.22 Ch5-Exercice 22 : réduction de Gauss en carrés

Les formes quadratiques suivantes sont-elle définies positives? semi-définies positives? On utilisera la décomposition de Gauss en carrés.

$$— q_1(x) = x_1^2 + 28x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3,$$

$$— q_2(x) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4,$$

$$— q_3(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Solution :

$$— q_1(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 + 5x_2)^2 + 2(x_2)^2.$$

Il est immédiat de voir que $\forall x : q_1(x) \geq 0$: c'est une somme de carrés.

De plus si $q_1(x) = 0$, alors

$$x_2 = 0, x_3 + 5x_2 = 0, x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$$

donc

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Donc q_1 est définie positive.

$$— q_2(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4)^2 - (x_1 - x_2 + 3x_4)^2 - 4(x_3 - x_4)^2 + 12(x_4)^2.$$

Si l'on choisit

$$x_3 = x_4 + 1, x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_4 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,$$

(ce qui est obtenu par exemple pour $x_3 = 1, x_4 = 0, x_1 = -1$ et $x_2 = -1$), on obtient $q_2(x) = -4$, donc la forme quadratique n'est ni définie positive, ni semi-définie positive.

On pourrait montrer de façon générale que pour que q forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ soit définie positive, il faut et il suffit que la réduction conduise à n carrés affectés de coefficients strictement positifs. Pour que q soit semi-définie positive, il faut et il suffit que la réduction conduise à des carrés affectés de coefficients positifs. Ceci est lié bien sûr aux valeurs propres de la matrice A associée.

— On a vu que la matrice associée à q_3 était semi-définie positive (voir l'exercice V.18), donc q_3 est semi-définie positive.

Si on appliquait la réduction de Gauss, on obtiendrait :

$$q_3(x) = 4 \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right)^2 + 3(x_2 - x_3)^2.$$

On a donc $\forall x : q_3(x) \geq 0$, mais si on prend

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} ,$$

alors $q_3(x) = 0$ (ce cas est obtenu par exemple pour $x_1 = x_2 = x_3 = 1$). On retrouve bien que q_3 est seulement semi-définie positive.

Exercice V.23 Ch5-Exercice 23 : forme sesquilinéaire hermitienne : diagonale dans R

Montrer que si ϕ est sesquilinéaire hermitienne, alors $\phi(\vec{x}, \vec{x})$ est dans $\mathbb{R}$.

Solution : Immédiat : $\phi(\vec{x}, \vec{x}) = \overline{\phi(\vec{x}, \vec{x})}$, donc $\phi(\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}$.
