

*Chapitre 6 : Equations différentielles*

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC

---

*février 2016*



# Chapitre 6

## Equations différentielles

6.1	Rappels . . . . .	3
6.2	Systèmes d'équations différentielles . . . . .	7
6.3	Existence et unicité des solutions des systèmes différentiels . . . . .	12
6.4	Systèmes à coefficients constants . . . . .	19
6.5	Equations différentielles du second ordre à coefficients constants . . . . .	24
6.6	Systèmes différentiels à coefficients non constants . . . . .	29

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.1 Rappels

6.1.1	Existence et unicité des solutions d'une équation différentielle . . . .	4
6.1.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	6

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.1.1 Existence et unicité des solutions d'une équation différentielle

Nous allons commencer par rappeler dans le premier paragraphe quelques résultats généraux sur les solutions des équations différentielles avant d'aborder la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires.

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et soit  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une équation différentielle est une équation de la forme

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (x'(t) = \frac{dx}{dt}). \quad (6.1.1)$$

Il faut ajouter une condition initiale pour préciser la solution désirée :

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (6.1.2)$$

#### Unicité

Le système (6.1.1)(6.1.2) n'a pas toujours une seule solution. C'est le cas pour le système

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{x(t)}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (6.1.3)$$

L'équation différentielle est à variables séparables

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1 \implies 2\sqrt{x(t)} = t + C.$$

Pour  $t + C \geq 0$  uniquement, elle admet la solution  $x(t) = \frac{(t + C)^2}{4}$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Compte-tenu de la condition initiale on a une solution

$$x(t) = \frac{t^2}{4} \text{ pour } t \geq 0.$$

Cette solution n'est pas unique car le système (6.1.3) admet aussi la solution  $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

### Existence

Le système (6.1.1)(6.1.2) n'a pas toujours de solution. Par exemple, soit le système

$$\begin{cases} tx'(t) + x(t) = 0, \\ x(0) = x_0 \ (x_0 \neq 0). \end{cases} \quad (6.1.4)$$

La solution de l'équation différentielle est  $x(t) = \frac{C}{t}$ . Mais elle est incompatible avec la condition initiale  $x_0 \neq 0$  et donc (6.1.4) n'a pas de solution. Evidemment si on prend  $x_0 = 0$ , la solution unique de (6.1.4) est  $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Existence et unicité des solutions d'une équation différentielle**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

**Théorème 6.1.1.** Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$  et  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les propriétés suivantes

1.  $f$  est continue sur  $I \times \mathbb{R}$ ,
2.  $f$  vérifie la **condition de Lipschitz** suivante : il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$\forall t \in I, x, z \in \mathbb{R}, |f(t, x) - f(t, z)| \leq L|x - z|,$$

alors le système

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (6.1.5)$$

admet une solution unique pour tout  $t \in I$ , quel que soit  $x_0$  donné dans  $\mathbb{R}$ .

Si on applique ce théorème à

$$\begin{cases} tx'(t) + x(t) = 0, \\ x(0) = x_0 \quad (x_0 \neq 0), \end{cases} \quad (6.1.6)$$

alors  $f(t, x) = -\frac{x}{t}$  et donc

$$|f(t, x) - f(t, z)| = \frac{|x - z|}{|t|}.$$

On ne pourra donc pas vérifier la condition de Lipschitz du théorème pour un intervalle  $I$  qui contient 0.

Ce théorème est aussi valable pour  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en prenant la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  au lieu de la valeur absolue.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2 Systèmes d'équations différentielles

6.2.1	Définition d'un système d'équations différentielles . . . . .	8
6.2.2	Equation différentielle d'ordre $n$ . . . . .	10

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.1 Définition d'un système d'équations différentielles

**Exemple 6.2.1.** Le système suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = (2t-1)x_1(t) + 2(1-t)x_2(t) + 2t, \\ x_2'(t) = (t-1)x_1(t) + (2-t)x_2(t) + t, \end{cases} \quad (6.2.1)$$

est un système de deux équations différentielles, dont l'écriture matricielle est

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \quad (6.2.2)$$

où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2(1-t) \\ t-1 & 2-t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, plutôt que de parler de  $x_1$  et  $x_2$  solutions du système 6.2.1, on utilisera  $x$  le vecteur solution du système 6.2.2 écrit sous forme matricielle. Si  $x_1$  et  $x_2$  sont des fonctions continuellement dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ( $\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ), alors bien sûr  $x \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$ .

**Définition 6.2.1.** On appelle **système d'équations différentielles linéaires du premier ordre** un système de la forme

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \quad (6.2.3)$$

où  $A(t) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  est une matrice donnée dont les éléments  $a_{ij}(t)$  sont donc des fonctions de la variable  $t$ . Le **second membre**  $g(t)$  appartient à  $\mathbb{R}^n$ , ses composantes  $g_i(t)$  sont des fonctions de la variable  $t$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

On dit que le système est à **coefficients constants** si la matrice  $A$  ne dépend pas de la variable  $t$ .

On dit que le système est **homogène** si  $g(t) = 0 \quad \forall t$ .

## Définition d'un système d'équations différentielles

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.2 Equation différentielle d'ordre n

**Exercices :**

[Exercice A.1.1](#)

Une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  se met sous la forme d'un système de  $n$  équations différentielles linéaires du premier ordre. En effet soit l'équation

$$z^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1(t)z'(t) + \alpha_0(t)z(t) = f(t). \quad (6.2.4)$$

On pose :

$$x_1(t) = z(t), x_2(t) = z'(t), \dots, x_n(t) = z^{(n-1)}(t),$$

alors (6.2.4) se réécrit :

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$$

où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0(t) & -\alpha_1(t) & -\alpha_2(t) & \dots & -\alpha_{n-2}(t) & -\alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

$$g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

## Equation différentielle d'ordre n

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.3 Existence et unicité des solutions des systèmes différentiels

6.3.1	Notations . . . . .	13
6.3.2	Système homogène . . . . .	15
6.3.3	Systèmes différentiels avec second membre . . . . .	17

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.3.1 Notations

#### Exercices :

[Exercice A.1.2](#)

[Exercice A.1.3](#)

- On note  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continuellement dérivables sur  $I$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . On définit  $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$  comme d'habitude par :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n \iff x_i \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), 1 \leq i \leq n.$$

- $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$  est un espace vectoriel donc on peut définir la notion de famille libre :  
 $X_1, X_2, \dots, X_p$  sont linéairement indépendants ou encore  
 $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  est une famille libre si et seulement si :

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_p X_p = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0.$$

Bien sûr  $X_1, X_2, \dots, X_p, \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_p X_p$  appartiennent à  $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$ , par exemple  $X_1 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})$  où  $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$  sont des fonctions appartenant à  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ .

On rappelle que :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_p X_p = 0 &\iff \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + \dots + \alpha_p X_p(t) = 0 \forall t \in I \\ &\iff \alpha_1 x_{i1}(t) + \alpha_2 x_{i2}(t) + \dots + \alpha_p x_{ip}(t) = 0 \forall t \in I, \forall i \text{ compris entre } 1 \text{ et } n. \end{aligned}$$

- On va introduire une notation qui nous servira par la suite :

$$\mathcal{S}_0 = \{x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n \mid x'(t) = A(t)x(t)\}$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

On peut montrer en exercice que  $S_0$  est un sous espace vectoriel de  $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$ .

- Dans la suite on suppose que  $A(t)$  est une matrice dont tous les coefficients  $a_{ij}(t)$  sont des fonctions continues de  $J \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $J$  est un intervalle fermé borné contenant  $I$ .

## Notations

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.3.2 Système homogène

**Exercices :**  
[Exercice A.1.4](#)

**Documents :**  
[Document B.1.1](#)

**Cours :**  
[Notations](#)

**Proposition 6.3.1.** *Soit :*

- $t_0 \in I$
  - $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$
- alors il existe un unique  $x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$  tel que

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Voir la démonstration de cette proposition en document.

**Proposition 6.3.2.**  $\mathcal{S}_0 = \{x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n \mid x'(t) = A(t)x(t)\}$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$  de dimension  $n$ .

Donc toute solution de  $x'(t) = A(t)x(t)$  peut s'écrire sous la forme

$$x = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n,$$

où  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  solutions de  $x'(t) = A(t)x(t)$  linéairement indépendantes.

*Démonstration* – On définit l'application  $u : x \mapsto \xi$  de  $\mathcal{S}_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ , qui à  $x \in \mathcal{S}_0$  associe  $\xi = x(t_0)$ , on a donc  $u(x) = x(t_0)$ . Cette application est bien définie d'après la Proposition 6.3.1.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

– L'application  $u$  est linéaire.

En effet,  $u(\lambda\phi + \mu\psi) = (\lambda\phi + \mu\psi)(t_0) = \lambda\phi(t_0) + \mu\psi(t_0) = \lambda u(\phi) + \mu u(\psi)$ .

–  $u$  est injective, en effet la solution du système  $x'(t) = A(t)x(t)$  est unique pour une condition initiale donnée, donc si  $\phi(t_0) = 0$ , alors  $\phi = 0$ , donc  $\text{Ker } u = \{0\}$ .

–  $u$  est surjective, en effet pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  il existe une solution  $\phi$  au système différentiel  $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$  qui vérifie  $\phi(t_0) = \xi$ , donc  $u(\phi) = \xi$ .

– L'application  $u$  est donc un isomorphisme de  $\mathcal{S}_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ , ce qui démontre que la dimension  $\mathcal{S}_0$  est égale à la dimension de  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire  $n$ .

## Système homogène

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.3.3 Systèmes différentiels avec second membre

**Exercices :**  
[Exercice A.1.5](#)

**Cours :**  
[Notations](#)  
Système homogène

**Proposition 6.3.3.** Soit  $g \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}))^n$ , la solution générale de l'équation

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$$

s'écrit

$$x = x_p + x_h$$

où  $x_p$  est une solution particulière qui vérifie :

$$x'_p(t) = A(t)x_p(t) + g(t)$$

et où  $x_h$  est la solution générale du système homogène correspondant, donc

$$x_h = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n,$$

où  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  solutions linéairement indépendantes du système homogène.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

*Démonstration* – On peut démontrer comme pour les systèmes homogènes qu’il existe au moins une solution à l’équation

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t).$$

Cette solution est unique si on fixe  $x(t_0)$ . Appelons  $x_p$  une solution particulière.

$x - x_p$  vérifie l’équation homogène

$$(x - x_p)'(t) = A(t)(x - x_p)(t),$$

ce qui implique que  $x - x_p \in \mathcal{S}_0$  et donc

$$x - x_p = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$$

d’où le résultat.

## Systemes différentiels avec second membre

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.4 Systèmes à coefficients constants

- 6.4.1 Systèmes homogènes à coefficients constants avec  $A$  diagonalisable . 20
- 6.4.2 Systèmes homogènes à coefficients constants avec  $A$  non diagonalisable 22
- 6.4.3 Systèmes non homogènes à coefficients constants . . . . . 23

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.4.1 Systèmes homogènes à coefficients constants avec $A$ diagonalisable

### Exercices :

[Exercice A.1.6](#)

[Exercice A.1.7](#)

Dans toute cette section on supposera que la matrice  $A$  ne dépend pas de  $t$ .

Traiter l'exercice [A.1.6](#), on voit alors que le système différentiel est très facile à résoudre lorsque la matrice  $A$  est diagonale. En fait on peut se ramener à ce cas très simple dès que  $A$  est diagonalisable. En effet on peut utiliser :

- $A = PDP^{-1}$ ,
  - $D$  matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres  $\lambda_i$ ,
  - $P$  : matrice des vecteurs propres de  $A$ ,  $P = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ,
- pour récrire le système  $x'(t) = Ax(t)$  sous la forme

$$x'(t) = PDP^{-1}x(t)$$

soit en multipliant à gauche par  $P^{-1}$  et en posant  $z(t) = P^{-1}x(t)$

$$z'(t) = Dz(t).$$

Chaque équation  $z'_i(t) = \lambda_i z_i(t)$  se résout directement pour donner

$$z_i(t) = \alpha_i e^{\lambda_i t},$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

d'où le résultat

$$x(t) = Pz(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} Y_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} Y_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} Y_n.$$

**Proposition 6.4.1.** *Si la matrice  $A$  est diagonalisable, alors toute solution de*

$$x'(t) = Ax(t)$$

*s'écrit sous la forme*

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} Y_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} Y_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} Y_n$$

*où  $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$  sont les valeurs propres de  $A$  et  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  une base de vecteurs propres correspondants.*

**Systèmes  
homogènes à  
coefficients  
constants avec  $A$   
diagonalisable**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.4.2 Systèmes homogènes à coefficients constants avec $A$ non diagonalisable

**Exercices :**

[Exercice A.1.8](#)

On a montré que  $A$  est toujours trigonalisable, c'est à dire il existe  $T$  triangulaire supérieure telle que  $T = P^{-1}AP$ , (la matrice  $T$  peut être éventuellement écrite sous forme de Jordan), donc

$$x'(t) = Ax(t) \iff x'(t) = PTP^{-1}x(t) \iff z'(t) = Tz(t)$$

où  $z(t) = P^{-1}x(t)$ . On a donc

$$\begin{cases} z'_1(t) = \lambda_1 z_1(t) + t_{12}z_2(t) + \dots + t_{1n}z_n(t) \\ z'_2(t) = \lambda_2 z_2(t) + \dots + t_{2n}z_n(t) \\ \vdots \\ z'_n(t) = \lambda_n z_n(t) \end{cases}$$

avec sur la diagonale de  $T$  les valeurs propres de  $A$ . On peut alors résoudre ce système en commençant par résoudre la dernière équation, puis on remplace  $z_n$  par sa valeur dans l'équation précédente que l'on peut alors résoudre, etc.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.4.3 Systèmes non homogènes à coefficients constants

**Exercices :**

[Exercice A.1.9](#)

On veut résoudre

$$x'(t) = Ax(t) + g(t).$$

On suppose que  $\hat{A}$  est semblable à  $A$ , c'est à dire  $\hat{A} = P^{-1}AP$ , on a donc :

$$x'(t) = P\hat{A}P^{-1}x(t) + g(t) \iff$$

$$P^{-1}x'(t) = \hat{A}P^{-1}x(t) + P^{-1}g(t) \iff$$

$$z'(t) = \hat{A}z(t) + \hat{g}(t) \text{ où } z(t) = P^{-1}x(t), \hat{g}(t) = P^{-1}g(t).$$

Si  $\hat{A}$  est diagonale ou triangulaire, on sait résoudre ce dernier système, ce qui permet d'obtenir  $z$ .

On en déduit  $x$  par :

$$x(t) = Pz(t).$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.5 Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

6.5.1	Rappels . . . . .	25
6.5.2	Solutions d'une équation différentielle du second ordre . . . . .	26

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.5.1 Rappels

### Exercices :

[Exercice A.1.10](#)

[Exercice A.1.11](#)

On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (6.5.1)$$

Vous avez vu dans les cours précédents que pour résoudre une telle équation on écrivait le trinôme caractéristique  $as^2 + bs + c$ , dont on cherchait les racines complexes. Deux cas peuvent se présenter :

– Si les deux racines sont distinctes, appelons les  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , alors on a :

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t},$$

– Si les deux racines sont confondues (donc réelles), appelons  $\lambda$  cette racine double alors on a :

$$y(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t) e^{\lambda t}.$$

Bien sûr dans le cas de racines distinctes complexes,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes conjuguées, si l'on cherche une solution réelle on choisira alors  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  complexes conjugués.

Vous pouvez traiter l'exercice [A.1.11](#), vous y trouverez une démonstration dans le cas des racines distinctes.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.5.2 Solutions d'une équation différentielle du second ordre

**Exercices :**

[Exercice A.1.12](#)

[Exercice A.1.13](#)

**Cours :**

[Equations différentielles du second ordre-rappels](#)

Traiter l'exercice [A.1.12](#).

On peut démontrer les résultats énoncés dans le paragraphe référencé en utilisant les propriétés des systèmes différentiels. On transforme l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

en un système d'équations différentielles du premier ordre en posant

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t),$$

ce qui donne

$$x'(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

Si l'on calcule les valeurs propres de  $A$  (c'est une matrice Compagnon), on est amené à chercher les racines du polynôme caractéristique

$$\det(sI - A) = s^2 + \frac{b}{a}s + \frac{c}{a}$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

et l'on retrouve l'équation caractéristique de (6.5.1) :

$$as^2 + bs + c = 0. \quad (6.5.2)$$

– Si les deux racines de (6.5.2) sont distinctes, les deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $A$  sont distinctes, la matrice est diagonalisable et l'on a

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} Y_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} Y_2$$

où les deux vecteurs propres sont

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ et } Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

et puisque  $y(t) = x_1(t)$  on retrouve la solution (bien connue)

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t},$$

les scalaires  $\alpha_1, \alpha_2$  étant réels ou complexes suivant que les valeurs propres sont réelles ou complexes.

– Si les deux racines de (6.5.2) sont confondues alors on a une valeur propre double  $\lambda = -\frac{b}{2a}$ , et un sous-espace propre de dimension 1. Un vecteur propre est donné par

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

que l'on complète, par exemple, avec le vecteur

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Solutions d'une équation différentielle du second ordre

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

pour former une base de  $\mathbb{R}^2$ . Puisque

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} - \left( \lambda + \frac{b}{a} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Y + \lambda U,$$

la matrice  $T$  s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On résout la deuxième équation, ce qui donne  $z_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda t}$ , que l'on reporte dans la première équation, ce qui donne

$$z_1'(t) = \lambda z_1(t) + \alpha_2 e^{\lambda t}$$

dont les solutions sont

$$z_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t}.$$

Si l'on revient alors à  $x = Pz$ , on voit que  $y = x_1 = z_1$ , ce qui redonne les solutions bien connues

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

## Solutions d'une équation différentielle du second ordre

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.6 Systèmes différentiels à coefficients non constants

6.6.1	<a href="#">Systèmes différentiels à coefficients non constants . . . . .</a>	30
-------	---	----

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.6.1 Systèmes différentiels à coefficients non constants

### Exercices :

[Exercice A.1.14](#)

On veut résoudre le système  $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ , bien sûr comme précédemment si la matrice  $A(t)$  est diagonale, alors la résolution est immédiate puisqu'on doit résoudre la famille d'équations différentielles linéaires indépendantes

$$x'_i(t) = a_{ii}(t)x_i(t) + g_i(t), \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

Par contre, si  $A(t)$  est diagonalisable, est-il toujours possible, comme dans le cas où  $A$  est constante, de se ramener à un système dont la matrice est diagonale ? La réponse n'est pas toujours positive. En effet si  $A$  dépend du temps  $t$  et même si, pour tout  $t$ ,  $A(t)$  est diagonalisable, le changement de base  $P(t)$  dépend du paramètre  $t$ . Ainsi s'il existe une famille de matrices  $P(t)$  régulières telles que

$$D(t) = P^{-1}(t)A(t)P(t)$$

est une matrice diagonale, alors en posant  $x(t) = P(t)z(t)$ , on obtient

$$P'(t)z(t) + P(t)z'(t) = A(t)P(t)z(t) + g(t)$$

et donc en multipliant à gauche par  $P^{-1}(t)$ , on obtient

$$P^{-1}(t)P'(t)z(t) + z'(t) = D(t)z(t) + P^{-1}(t)g(t)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

et donc on n'est pas ramené à un système dont la matrice est diagonale (à cause du premier terme). Sauf bien sûr dans le cas très particulier où  $P'(t) = 0$ .

L'exemple suivant illustre ce cas : on veut résoudre

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$$

où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2(1-t) \\ t-1 & 2-t \end{pmatrix} \text{ et } g(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A(t)$  admet  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = t$  comme valeurs propres avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme vecteurs propres associés. Donc, si on pose  $x = Pz$ , on obtient le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_1(t) \\ z_2'(t) = tz_2(t) + t \end{cases}$$

dont on peut résoudre indépendamment les deux équations différentielles.

## Systemes différentiels à coefficients non constants

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe A

## Exercices

A.1	Exercices du chapitre 6 . . . . .	33
A.2	Exercices de TD . . . . .	48

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## A.1 Exercices du chapitre 6

A.1.1	Ch6-Exercice1 . . . . .	34
A.1.2	Ch6-Exercice2 . . . . .	35
A.1.3	Ch6-Exercice3 . . . . .	36
A.1.4	Ch6-Exercice4 . . . . .	37
A.1.5	Ch6-Exercice5 . . . . .	38
A.1.6	Ch6-Exercice6 . . . . .	39
A.1.7	Ch6-Exercice7 . . . . .	40
A.1.8	Ch6-Exercice8 . . . . .	41
A.1.9	Ch6-Exercice9 . . . . .	42
A.1.10	Ch6-Exercice10 . . . . .	43
A.1.11	Ch6-Exercice11 . . . . .	44
A.1.12	Ch6-Exercice12 . . . . .	45
A.1.13	Ch6-Exercice13 . . . . .	46
A.1.14	Ch6-Exercice14 . . . . .	47

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.1** Ch6-Exercice1

On veut résoudre

$$z''(t) + b(t)z'(t) + c(t)z(t) = 0, \text{ b et c étant des fonctions réelles.}$$

Transformer cette équation différentielle du second ordre en un système d'équations différentielles du premier ordre

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.2** Ch6-Exercice2

On définit  $X_1, X_2$  par  $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix}, X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\cos t} \end{pmatrix}$ . Montrer que  $(X_1, X_2)$  est une famille libre de  $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.3 Ch6-Exercice3

On définit  $\mathcal{S}_0 = \{x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n \mid x'(t) = A(t)x(t)\}$ .

Montrer que  $\mathcal{S}_0$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.4** Ch6-Exercice4

On définit  $A(t) = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}$ , résoudre  $x'(t) = A(t)x(t)$ . Montrer que l'on peut écrire

$$x(t) = \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t)$$

où  $X_1, X_2$  sont 2 solutions linéairement indépendantes de  $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.5** Ch6-Exercice5

Résoudre  $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$  où  $A(t) = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}$ ,  $g(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1 - t \sin t \end{pmatrix}$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.6 Ch6-Exercice6

Résoudre le système différentiel  $x'(t) = Ax(t)$ , avec  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.7** Ch6-Exercice7

Résoudre le système différentiel  $x'(t) = Ax(t)$ , avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.8** Ch6-Exercice8

On définit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ , montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable.

On note  $Y_1$  un vecteur propre de  $A$ , on choisit  $Y_2$  un vecteur quelconque tel que  $(Y_1, Y_2)$  soit une famille libre. On définit  $P = (Y_1 Y_2)$ .  $P$  est inversible. (pourquoi?)

1. Montrer que  $T = P^{-1}AP$  est une matrice triangulaire supérieure qui vérifie

$$t_{11} = t_{22} = 2.$$

2. Résoudre  $x'(t) = Ax(t)$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.9 Ch6-Exercice9

Résoudre le système différentiel  $x'(t) = Ax(t) + g(t)$ ,

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, g(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.10** Ch6-Exercice10

Résoudre  $y'' - 2y' + 2y = 0$ . Donner les solutions dans  $\mathbb{C}$  puis dans  $\mathbb{R}$ .

[retour au cours](#)

Solution

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.11** Ch6-Exercice11

$t_0, a, b$  et  $c$  sont des réels fixés, on suppose  $a \neq 0$ . On admettra que pour tout couple  $(y_0, y_1)$  donné il existe une et une seule fonction  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

On note  $S_0 = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ vérifiant } y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$

On appelle  $u$  l'application de  $S_0$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui à  $y$  associe  $(y_0, y_1)$  définis par  $y_0 = y(t_0), y_1 = y'(t_0)$ .

1. Montrer que  $S_0$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $u$  est linéaire.
3. Montrer que  $u$  est bijective de  $S_0$  dans  $\mathbb{R}^2$ .
4. En déduire que la dimension de  $S_0$  est 2.
5. Si  $\lambda$  vérifie  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ , montrer que la fonction  $y$  définie par  $y(t) = e^{\lambda t}$  appartient à  $S_0$ .
6. On suppose qu'il existe 2 racines distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de l'équation  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ , montrer que  $e^{\lambda_1 t}$  et  $e^{\lambda_2 t}$  sont 2 fonctions linéairement indépendantes de  $S_0$ .
7. En déduire que  $\forall y \in S_0 \quad y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.12** Ch6-Exercice12

- Quel est le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\beta \end{pmatrix} (\beta, \gamma \in \mathbb{R})?$$

- Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  alors  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé.
- Montrer que si  $A$  admet une valeur propre double, elle n'est pas diagonalisable.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### **Exercice A.1.13** Ch6-Exercice13

Mettre l'équation différentielle  $y'' - 2y' + 2y = 0$  sous forme d'un système différentiel du premier ordre. Puis le résoudre dans  $\mathbb{C}$ , comparer avec les résultats obtenus dans l'exercice [A.1.10](#).

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.14** Ch6-Exercice14

Résoudre le système :

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_1(t) \\ z_2'(t) = tz_2(t) + t \end{cases}$$

En déduire la solution du système différentiel  $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ , avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2(1-t) \\ t-1 & 2-t \end{pmatrix} \text{ et } g(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## A.2 Exercices de TD

A.2.1	TD6-Exercice1 . . . . .	49
A.2.2	TD6-Exercice2 . . . . .	50
A.2.3	TD6-Exercice3 . . . . .	51
A.2.4	TD6-Exercice4 . . . . .	52
A.2.5	TD6-Exercice5 . . . . .	53

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.1** TD6-Exercice1

Soit le système d'équations différentielles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1(0) = \alpha \\ x_2(0) = \beta \\ x_3(0) = \gamma \end{cases}.$$

1. Montrer que (I) peut se mettre sous la forme

$$(II) \quad z' = Dz \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z_1(0) = a \\ z_2(0) = b \\ z_3(0) = c \end{cases} \quad \text{et } D \text{ matrice diagonale.}$$

Déterminer  $D$  et les coefficients  $a, b, c$ .

2. Résoudre (II).

3. En déduire la solution  $x$  de (I).

$$\text{Réponses : } \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{6}(\alpha + \beta - 2\gamma) + \frac{1}{6}(5\alpha - \beta + 2\gamma)e^{6t} \\ x_2(t) = \frac{1}{6}(\alpha + \beta - 2\gamma) + \frac{1}{6}(-\alpha + 5\beta + 2\gamma)e^{6t} \\ x_3(t) = -\frac{1}{3}(\alpha + \beta - 2\gamma) + \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)e^{6t} \end{cases}$$

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.2** TD6-Exercice2

Soit le système d'équations différentielles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 + 2x_3 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1(0) = \alpha \\ x_2(0) = \beta \\ x_3(0) = \gamma \end{cases} .$$

1. Montrer que (I) peut se mettre sous la forme

$$(II) \quad z' = Tz \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z_1(0) = a \\ z_2(0) = b \\ z_3(0) = c \end{cases} \quad \text{et } T \text{ matrice de Jordan.}$$

2. Résolvez (II), puis donnez la solution de (I).

$$\text{Réponses :} \begin{cases} x_1(t) = \alpha e^t + (\beta - \gamma) t e^t \\ x_2(t) = (\alpha + \beta) e^{2t} - \alpha e^t + (-\beta + \gamma) t e^t \\ x_3(t) = (\alpha + \beta) e^{2t} + (-\alpha - \beta + \gamma) e^t + (-\beta + \gamma) t e^t \end{cases}$$

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.3** TD6-Exercice3

Soit le système d'équations différentielles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = -2x_1 - x_2 \end{cases} .$$

1. Montrer que (I) peut se mettre sous la forme

$$(II) \quad z' = Dz \quad \text{avec } D \text{ matrice diagonale.}$$

2. Résoudre (II).

3. En déduire les solutions réelles  $x$  de (I).

Réponses :  $A = PDP^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

et  $\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 \cos t - \beta_1 \sin t \\ x_2(t) = -(\alpha_1 + \beta_1) \cos t + (-\alpha_1 + \beta_1) \sin t \end{cases}$

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.4** TD6-Exercice4

Soit le système d'équations différentielles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + e^t \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + t \end{cases} .$$

1. Montrer que (I) peut se mettre sous la forme

$$(II) \quad z' = Dz + g \quad \text{avec } D \text{ matrice diagonale et } g \text{ fonction de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

Déterminer  $D$  et la fonction  $g$ .

2. Résoudre (II).

3. En déduire les solutions  $x$  de (I).

$$\text{Réponses : } \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{2}{3}t + \frac{4}{9} \\ x_2(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3}t - \frac{5}{9} \end{cases} .$$

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.5** TD6-Exercice5

1. Soit le système d'équations différentielles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} x_1'(t) = & x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) & +2\text{cht} \end{cases} .$$

(a) Montrer que (I) peut se mettre sous la forme

$$(II) \quad z' = Dz + g \quad \text{avec } D \text{ matrice diagonale et } g \text{ fonction de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

(b) Résoudre (II).

(c) En déduire la solution  $x$  de (I).

$$\text{Réponses : } \begin{cases} x_1(t) = (C_1 - \frac{1}{4})e^{-t} + (C_2 - \frac{1}{4})e^t + t\text{sh}t \\ x_2(t) = (-C_1 - \frac{1}{4})e^{-t} + (C_2 + \frac{1}{4})e^t + t\text{ch}t \end{cases} .$$

2. Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y''(t) = y(t) + 2\text{cht}.$$

Comparer avec ce qui a été trouvé précédemment.

Question 1b [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 1c [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 2 [Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe B

## Documents

B.1	Documents du chapitre 6 . . . . .	55
-----	-----------------------------------	----

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## B.1 Documents du chapitre 6

B.1.1	Existence et unicité de la solution d'un système différentiel . . . . .	56
-------	---	----

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Document B.1.1** Existence et unicité de la solution d'un système différentiel

- Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .
  - On note  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continuellement dérivables sur  $I$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ ,
  - $J$  est un intervalle fermé borné contenant  $I$ ,
  - $A(t)$  est une matrice dont tous les coefficients  $a_{ij}(t)$  sont des fonctions continues de  $J \rightarrow \mathbb{R}$ ,
  - $t_0 \in I$
  - $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$
- alors il existe un unique  $x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$  tel que

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

*Démonstration* –

L'existence et l'unicité proviennent du théorème de Cauchy-Lipschitz. D'une part le deuxième membre  $f(t, x) = A(t)x$  est continu puisque les éléments de la matrice sont des fonctions continues. D'autre part le deuxième membre vérifie la condition de Lipschitz. En effet, les fonctions  $a_{ij}(t)$  sont continues sur un intervalle  $J$  ( $I \subset J$ ) fermé borné, donc  $|a_{ij}(t)| \leq M, \forall t \in I, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ . Alors

$$\begin{aligned} \|A(t)(x - z)\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_j - z_j) \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n (a_{ij}(t))^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2 \right) \leq \\ &\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n M^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2 \right) = n^2 M^2 \|x - z\|^2 \end{aligned}$$

Dans la démonstration précédente on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à savoir :

$$\left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_j - z_j) \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n (a_{ij}(t))^2 \sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2$$

[retour au cours](#)

### Document B.1.1

Existence et unicité de la solution d'un système différentiel

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini;  
l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple;  
le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

## C

Cauchy-Lipschitz, théorème ..... **6**

## E

Equation différentielle d'ordre  $n$  ..... **10**

Equations différentielles du second ordre-rappels  
**25, 26**

Equations différentielles du second ordre-solution  
**26**

Equations différentielles, existence et unicité des  
solutions ..... **4**

## N

Notations ..... **13, 15, 17**

## S

Système d'équations différentielles, définition **8**

Système différentiel à coefficients non constants  
**30**

Système homogène ..... **15**

Systèmes différentiels avec second membre . **17**

Systèmes homogènes à coefficients constants avec  
A diagonalisable ..... **20**

Systèmes homogènes à coefficients constants avec  
A non diagonalisable ..... **22**

Systèmes non homogènes à coefficients constants  
**23**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Solution de l'exercice A.1.1

$$x_1(t) = z(t),$$

$$x_2(t) = z'(t)$$

donc

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -b(t)x_2(t) - c(t)x_1(t) \end{cases} \iff x'(t) = A(t)x(t) \text{ avec } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(t) & -b(t) \end{pmatrix}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.2

On remarque tout d'abord que  $X_1$  et  $X_2$  appartiennent à  $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$ .

D'autre part :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0 &\iff \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R} \iff \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{t^2} \\ \alpha_2 e^{-\cos t} \end{pmatrix} = 0 \forall t \in \mathbb{R} &\iff \begin{cases} \alpha_1 e^{t^2} = 0 \forall t \in \mathbb{R} \\ \alpha_2 e^{-\cos t} = 0 \forall t \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

(Il suffit de choisir  $t = 0$ .)

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.3

$S_0$  n'est pas vide, car  $0 \in S_0$  et  $S_0$  est stable.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.4

$$\begin{aligned}x'(t) = A(t)x(t) &\iff \begin{cases} x'_1(t) = 2t x_1(t) \\ x'_2(t) = \sin t x_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{t^2} \\ x_2(t) = \alpha_2 e^{-\cos t} \end{cases} \\ &\iff x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\cos t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On retrouve les fonctions  $X_1, X_2$  définies dans l'exercice 2, on a montré qu'elles étaient linéairement indépendantes.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.5

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \iff \begin{cases} x_1'(t) = 2t x_1(t) - t \\ x_2'(t) = \sin t x_2(t) + 1 - t \sin t \end{cases} .$$

On obtient deux équations différentielles avec second membre.

On résout les équations sans second membre, on obtient

$$x_{1h}(t) = \alpha_1 e^{t^2}, \quad x_{2h}(t) = \alpha_2 e^{-\cos t}.$$

En réfléchissant un peu on trouve une solution particulière pour chacune des équations qui sont

$$x_{1p}(t) = \frac{1}{2}, \quad x_{2p}(t) = t.$$

D'où la solution

$$x(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\cos t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.6

$$x'(t) = Ax(t) \iff \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) \\ x_2'(t) = 3x_2(t) \end{cases} \iff$$
$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{2t} \\ x_2(t) = \alpha_2 e^{3t} \end{cases} \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.7

On calcule les valeurs propres de  $A$ , on obtient

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3,$$

on calcule des vecteurs propres associés, on obtient

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc si on note

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

on a  $A = PDP^{-1}$ , donc

$$x'(t) = Ax(t) \iff P^{-1}x'(t) = DP^{-1}x(t).$$

Si l'on pose  $z(t) = P^{-1}x(t)$ , on a donc en utilisant l'exercice précédent :

$$z'(t) = Dz(t) \iff \begin{cases} z_1(t) &= \alpha_1 e^{2t} \\ z_2(t) &= \alpha_2 e^{3t} \end{cases} .$$

On obtient enfin :

$$x(t) = Pz(t) \iff \begin{cases} x_1(t) &= \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{3t} \\ x_2(t) &= -\alpha_1 e^{2t} - 2\alpha_2 e^{3t} \end{cases} , \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.8

On calcule les valeurs propres de  $A$ , on obtient que 2 est valeur propre double. On détermine les vecteurs propres associés, on obtient un sous espace propre de dimension 1 un vecteur propre est par exemple

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut choisir par exemple  $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

La matrice  $P$  est inversible puisque  $Y_1, Y_2$  forment une base de  $\mathbb{R}^2$ .

1. On note  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui à  $x$  associe  $Ax$ . La matrice de  $f$  dans la base canonique est bien sûr  $A$ . D'autre part  $AY_1 = 2Y_1$ , donc la matrice de  $f$  dans la base  $(Y_1, Y_2)$  est  $T = \begin{pmatrix} 2 & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}$ , d'autre part cette matrice est semblable à  $A$  ( $T = P^{-1}AP$ ) donc elle admet les mêmes valeurs propres donc  $t_{22} = 2$ , ce qui termine la démonstration.
2. On peut maintenant déterminer  $t_{12}$ , on calcule  $AY_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = Y_1 + 2Y_2$ , on obtient donc  $t_{12} = 1$ , on retrouve bien sûr que  $t_{22} = 2$ . On peut maintenant résoudre le système :

$$x'(t) = Ax(t) \iff z'(t) = Tz(t) \text{ avec } z(t) = P^{-1}x(t),$$

on obtient les équations différentielles :

$$z_2'(t) = 2z_2(t) \iff z_2(t) = \alpha_2 e^{2t},$$

$$z_1'(t) = 2z_1(t) + z_2(t) \iff z_1(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t) e^{2t}.$$

On obtient enfin

$$x(t) = Pz(t) \iff x(t) = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2 t) e^{2t} \\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 t) e^{2t} \end{pmatrix}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.9

2 façons de procéder :

– On effectue un changement de fonction inconnue en posant  $z(t) = P^{-1}x(t)$ , on a :

$$x'(t) = Ax(t) + g(t) \iff z'(t) = Dz(t) + P^{-1}g(t) \iff \begin{cases} z_1'(t) = 2z_1(t) + 4t \\ z_2'(t) = 3z_2(t) - 3t \end{cases} .$$

On résout chacune des équations différentielles, on ajoute à la solution générale de l'équation sans second membre déjà calculée dans l'exercice précédent, une solution particulière cherchée sous forme polynômiale (1-er degré), on obtient :

$$\begin{cases} z_1(t) = \alpha_1 e^{2t} - 2t - 1 \\ z_2(t) = \alpha_2 e^{3t} + t + \frac{1}{3} \end{cases} ,$$

donc  $x(t) = Pz(t)$  donne :

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{3t} - t - \frac{2}{3} \\ x_2(t) = -\alpha_1 e^{2t} - 2\alpha_2 e^{3t} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

– On utilise les résultats du paragraphe [Systèmes non homogènes à coefficients constants](#), on connaît déjà la solution générale du système sans second membre (homogène), il reste à calculer une solution particulière. On cherche cette solution  $x_p(t)$  sous forme polynômiale :

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} \beta_1 t + \gamma_1 \\ \beta_2 t + \gamma_2 \end{pmatrix} .$$

On obtient alors les équations vérifiées par  $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  :

$$\begin{cases} \beta_1 & -\beta_2 & & & = -1 \\ \beta_1 & & -\gamma_1 & +\gamma_2 & = 0 \\ 2\beta_1 & +4\beta_2 & & & = -2 \\ & \beta_2 & -2\gamma_1 & +4\gamma_2 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta_1 = -1 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_1 = -\frac{2}{3} \\ \gamma_2 = \frac{1}{3} \end{cases} .$$

Ce qui donne bien sûr la même solution.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.10

Le trinôme caractéristique  $s^2 - 2s + 2$  a pour racines  $1 + i$  et  $1 - i$ . On obtient donc les solutions complexes :

$$y(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} + \alpha_2 e^{(1-i)t} \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Pour obtenir les solutions réelles on doit choisir  $\alpha_1, \alpha_2$  complexes conjugués, par exemple

$$\alpha_1 = a_1 + i a_2, \alpha_2 = a_1 - i a_2 \text{ avec } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Après calculs, on obtient les solutions réelles :

$$y(t) = (\beta_1 \cos t + \beta_2 \sin t) e^t \text{ avec } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

On a posé  $\beta_1 = 2a_1, \beta_2 = -2a_2$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.11

1.  $S_0$  contient la fonction nulle donc est non vide, on montre d'autre part que  $S_0$  est stable.
2. On montre facilement que  $u(y+z) = u(y) + u(z)$ ,  $u(\alpha y) = \alpha u(y)$ .
3. –  $u$  est surjective : c'est l'existence de la solution du problème

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

qui permet de conclure en effet à tout couple  $(y_0, y_1)$  correspond une fonction  $y$  de  $S_0$ .

- $u$  est injective : c'est l'unicité de la solution au même problème qui permet de conclure, il ne peut exister 2 fonctions distinctes de  $S_0$  qui vérifient  $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$ .
4. Les dimensions des 2 espaces vectoriels  $S_0$  et  $\mathbb{R}^2$  sont donc égales.
  5. Il suffit de calculer  $ay''(t) + by'(t) + cy(t)$ .
  6. Tout d'abord les fonctions  $y_1$  et  $y_2$  définies par  $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$  et  $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$  appartiennent à  $S_0$ , montrons que ces fonctions forment une famille libre. On a :

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \iff \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donc en particulier pour  $t = 0$  on obtient

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

D'autre part puisque  $\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \quad \forall t$  cette fonction a une dérivée nulle, si on évalue la dérivée pour  $t = 0$  on obtient

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 = 0.$$

On a donc obtenu 2 équations linéaires dont les inconnues sont  $\alpha_1, \alpha_2$ , le déterminant de la matrice du système vaut  $\lambda_1 - \lambda_2$ , il est donc différent de 0. Donc ce système admet une solution unique  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Les fonctions  $y_1, y_2$  sont donc linéairement indépendantes.

7. On en déduit que  $y_1, y_2$  est une base de  $S_0$  donc toute fonction  $y$  de  $S_0$  se décompose sur cette base.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.12

–  $\pi_A(s) = s^2 + \beta s + \gamma$  ( $A$  est une matrice Compagnon comme vous l'avez vu dans l'exercice 2 du TD4).

–

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\gamma - \beta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$

(On rappelle que  $\lambda$  vérifie  $\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$ ).

– Comme on l'a déjà vu si  $A$  admet une valeur propre double  $\lambda$  et si  $A$  est diagonalisable, alors  $A$  est semblable à  $\lambda I$  et on a  $A = P^{-1}(\lambda I)P = \lambda I$ , ce qui n'est pas possible. Une autre façon de démontrer le résultat serait :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\gamma & -\beta - \lambda \end{pmatrix},$$

donc le rang de  $A - \lambda I$  est supérieur ou égal à 1, donc la dimension de  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  est inférieur ou égal à 1, donc la dimension de  $V_\lambda$  n'est pas égale à la multiplicité de la valeur propre (double)  $\lambda$ , donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.13

On pose  $y = x_1, y' = x_2$ , on a alors :

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \iff \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases} \iff x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x(t).$$

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  admet 2 valeurs propres  $1 + i$  et  $1 - i$ , des vecteurs propres correspondants sont

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}.$$

On définit comme d'habitude  $P = (Y_1 Y_2), x = Pz$ . On résout

$$\begin{cases} z_1'(t) = (1 + i)z_1(t) \\ z_2'(t) = (1 - i)z_2(t) \end{cases},$$

on obtient

$$\begin{cases} z_1(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} \\ z_2(t) = \alpha_2 e^{(1-i)t} \end{cases}$$

Enfin

$$x = Pz \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} + \alpha_2 e^{(1-i)t} \\ x_2(t) = \alpha_1 (1 + i) e^{(1+i)t} + \alpha_2 (1 - i) e^{(1-i)t} \end{cases}.$$

On retrouve bien sûr  $y = x_1$  et on vérifie que  $y' = x_2$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.14

On a vu dans le cours que la matrice  $A(t)$  admet  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = t$  comme valeurs propres avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme vecteurs propres associés.

Donc, si on pose  $x(t) = Pz(t)$ , le système

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$$

est équivalent à

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_1(t) \\ z_2'(t) = tz_2(t) + t \end{cases} \iff \begin{cases} z_1(t) = \alpha_1 e^t \\ z_2(t) = \alpha_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \end{cases} .$$

D'où

$$x(t) = Pz(t) \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 2 \\ x_2(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \end{cases}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.1

Voir le paragraphe "[Systèmes homogènes à coefficients constants avec A diagonalisable](#)".

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.1

Ecrire la matrice du système, elle a déjà été étudiée dans l'exercice 7 du TD5. Utiliser les résultats trouvés alors.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Exercice A.2.1

Montrer que l'on obtient trois équations différentielles faisant intervenir respectivement  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .  
Résoudre ces trois équations.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.2

Voir le paragraphe "[Systèmes homogènes à coefficients constants avec A non diagonalisable](#)".

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.2

Ecrire la matrice du système, elle a déjà été étudiée dans l'exercice 11 du TD4. Utiliser les résultats trouvés alors.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.2

Vous avez appris en MT21 que la solution générale d'une équation linéaire non homogène est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.2

Quand le second membre est  $e^{at}$ , on cherche la solution particulière sous forme  $\alpha e^{at}$ , sauf si  $e^{at}$  est solution de l'équation homogène, dans ce cas on cherche la solution particulière sous forme  $\alpha t e^{at}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.3

Voir le paragraphe "[Systèmes homogènes à coefficients constants avec A diagonalisable](#)".

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.3

La recherche des solutions complexes se fait comme dans les exercices précédents.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Exercice A.2.3

N'oubliez pas que la somme de 2 complexes conjugués est réelle, choisissez donc les constantes complexes de façon astucieuse.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Exercice A.2.3

Vous pouvez vous inspirer du corrigé de l'exercice [A.1.10](#) du cours.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.4

Voir le paragraphe "[Systèmes non homogènes à coefficients constants](#)".

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.4

Etudier rapidement la matrice  $A$  du système, elle est diagonalisable. Pourquoi?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.4

Montrer que  $A = PDP^{-1}$  avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.4

Vous avez appris en MT21 que la solution générale d'une équation linéaire non homogène est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.4

Quand le second membre est polynômial, on cherche la solution particulière sous forme polynômiale, quand le second membre est exponentiel on cherche la solution particulière sous forme exponentielle. Lorsque le second membre est une somme de termes on peut ajouter les solutions particulières correspondant à chacun d'eux.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.5

Voir le paragraphe "[Systèmes non homogènes à coefficients constants](#)".

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.5

Montrer que la matrice  $A$  est diagonalisable et s'écrit  $A = PDP^{-1}$  avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1c, Exercice A.2.5

Vous avez appris en MT21 que la solution générale d'une équation linéaire non homogène est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1c, Exercice A.2.5

Lorsque le second membre est une somme de termes on peut ajouter les solutions particulières correspondant à chacun d'eux.

Quand le second membre est  $e^{at}$ , on cherche la solution particulière sous forme  $\alpha e^{at}$ , sauf si  $e^{at}$  est solution de l'équation homogène, dans ce cas on cherche la solution particulière sous forme  $\alpha t e^{at}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 1c, Exercice A.2.5

Quelle relation lie  $x_1, x_2$  et  $y$ ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.5

Voir le paragraphe "[Equations différentielles du second ordre-rappels](#)".

[Retour à l'exercice ▲](#)