

*Chapitre 6 : Équations différentielles linéaires*

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC

---

*juillet 2026*



# Chapitre 6

## Équations différentielles linéaires

|     |                                                                              |    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.1 | Rappels . . . . .                                                            | 3  |
| 6.2 | Systèmes d'équations différentielles linéaires . . . . .                     | 7  |
| 6.3 | Existence et unicité des solutions des systèmes différentiels . . . . .      | 12 |
| 6.4 | Systèmes à coefficients constants . . . . .                                  | 19 |
| 6.5 | Équations différentielles du second ordre à coefficients constants . . . . . | 24 |
| 6.6 | Systèmes différentiels à coefficients non constants . . . . .                | 29 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.1 Rappels

|       |                                                                            |   |
|-------|----------------------------------------------------------------------------|---|
| 6.1.1 | Existence et unicité des solutions d'une équation différentielle . . . . . | 4 |
| 6.1.2 | Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .                                     | 6 |

### 6.1.1 Existence et unicité des solutions d'une équation différentielle

Nous allons commencer par rappeler dans ce premier paragraphe quelques résultats généraux sur les solutions des équations différentielles avant d'aborder la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires.

Soit  $I$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  et soit  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Une équation différentielle est une équation de la forme

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (x'(t) = \frac{dx}{dt}). \quad (6.1.1)$$

Il faut ajouter une condition initiale pour préciser la solution désirée :

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (6.1.2)$$

#### Unicité

Le système (6.1.1)-(6.1.2) n'a pas toujours une seule solution. C'est le cas pour le système

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{x(t)}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (6.1.3)$$

L'équation différentielle est à variables séparables

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1 \implies 2\sqrt{x(t)} = t + C.$$

Pour  $t + C \geq 0$  uniquement, elle admet la solution  $x(t) = \frac{(t + C)^2}{4}$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Compte-tenu de la condition initiale on a une solution

$$x(t) = \frac{t^2}{4} \text{ pour } t \geq 0.$$

Cette solution n'est pas unique car le système (6.1.3) admet aussi la solution  $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

### Existence

Le système (6.1.1)-(6.1.2) n'a pas toujours de solution. Par exemple, soit le système

$$\begin{cases} tx'(t) + x(t) = 0, \\ x(0) = x_0 \ (x_0 \neq 0). \end{cases} \quad (6.1.4)$$

La solution de l'équation différentielle est  $x(t) = \frac{C}{t}$ . Mais elle est incompatible avec la condition initiale  $x_0 \neq 0$  et donc (6.1.4) n'a pas de solution. Évidemment si on prend  $x_0 = 0$ , la solution unique de (6.1.4) est  $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Existence et  
unicité des  
solutions d'une  
équation  
différentielle**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

**Théorème 6.1.1.** Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$  et  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les propriétés suivantes

1.  $f$  est continue sur  $I \times \mathbb{R}$ ,
2.  $f$  vérifie la **condition de Lipschitz** suivante : il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$\forall t \in I, x, z \in \mathbb{R}, |f(t, x) - f(t, z)| \leq L|x - z|,$$

alors le système

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (6.1.5)$$

admet une solution unique pour tout  $t \in I$ , quel que soit  $x_0$  donné dans  $\mathbb{R}$ .

Si on applique ce théorème à

$$\begin{cases} tx'(t) + x(t) = 0, \\ x(0) = x_0 \ (x_0 \neq 0), \end{cases} \quad (6.1.6)$$

alors  $f(t, x) = -\frac{x}{t}$  et donc

$$|f(t, x) - f(t, z)| = \frac{|x - z|}{|t|}.$$

On ne pourra donc pas vérifier la condition de Lipschitz du théorème pour un intervalle  $I$  qui contient 0.

Ce théorème est aussi valable pour  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en prenant la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  au lieu de la valeur absolue.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2 Systèmes d'équations différentielles linéaires

|       |                                                                         |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.2.1 | Définition d'un système d'équations différentielles linéaires . . . . . | 8  |
| 6.2.2 | Équation différentielle linéaire d'ordre $n$ . . . . .                  | 10 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.2.1 Définition d'un système d'équations différentielles linéaires

Dans le reste de ce chapitre, nous nous limiterons aux équations différentielles **linéaires**. Dorénavant, la fonction  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de l'équation (6.1.1) sera affine ou linéaire en la seconde variable  $x$ . Cela permettra d'appliquer certains résultats vus dans les chapitres précédents.

**Exemple 6.2.1.** Le système suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = (2t-1)x_1(t) + 2(1-t)x_2(t) + 2t, \\ x_2'(t) = (t-1)x_1(t) + (2-t)x_2(t) + t, \end{cases} \quad (6.2.1)$$

est un système de deux équations différentielles, dont l'écriture matricielle est

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \quad (6.2.2)$$

où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2(1-t) \\ t-1 & 2-t \end{pmatrix} \text{ et } g(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, plutôt que de parler de  $x_1$  et  $x_2$  solutions du système (6.2.1), on utilisera  $x$  le vecteur solution du système (6.2.2) écrit sous forme matricielle. Si  $x_1$  et  $x_2$  sont des fonctions continuellement dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ( $\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ), alors bien sûr  $x \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$ .

**Définition 6.2.1.** On appelle **système d'équations différentielles linéaires du premier ordre** un système de la forme

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \quad (6.2.3)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

où  $A(t) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  est une matrice donnée dont les éléments  $a_{ij}(t)$  sont donc des fonctions de la variable  $t$ . Le **second membre**  $g(t)$  appartient à  $\mathbb{R}^n$ , ses composantes  $g_i(t)$  sont des fonctions de la variable  $t$ .

On dit que le système est à **coefficients constants** si la matrice  $A$  ne dépend pas de la variable  $t$ .

On dit que le système est **homogène** si  $g(t) = 0 \ \forall t$ .

## Définition d'un système d'équations différentielles linéaires

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 6.2.2 Équation différentielle linéaire d'ordre $n$

### Exercices :

#### [Exercice A.1.1](#)

Une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  se met sous la forme d'un système de  $n$  équations différentielles linéaires du premier ordre. En effet soit l'équation

$$z^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1(t)z'(t) + \alpha_0(t)z(t) = f(t). \quad (6.2.4)$$

On pose :

$$x_1(t) = z(t), \quad x_2(t) = z'(t), \dots, \quad x_n(t) = z^{(n-1)}(t),$$

alors (6.2.4) se réécrit :

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$$

où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0(t) & -\alpha_1(t) & -\alpha_2(t) & \dots & -\alpha_{n-2}(t) & -\alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

La matrice  $A(t)$  est une matrice Compagnon, voir l'Exercice 2 de TD du Chapitre 4. Elle est nulle partout, sauf la sur-diagonale qui vaut 1 et la dernière ligne qui est remplie des  $-\alpha_i(t)$ .

**Équation  
différentielle  
linéaire d'ordre  $n$**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.3 Existence et unicité des solutions des systèmes différentiels

|       |                                                                     |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------|----|
| 6.3.1 | <a href="#">Notations</a> . . . . .                                 | 13 |
| 6.3.2 | <a href="#">Système homogène</a> . . . . .                          | 15 |
| 6.3.3 | <a href="#">Systèmes différentiels avec second membre</a> . . . . . | 17 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.3.1 Notations

#### Exercices :

[Exercice A.1.2](#)

[Exercice A.1.3](#)

- On note  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continuellement dérivables sur  $I$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . On définit  $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$  comme d'habitude par :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n \iff x_i \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), 1 \leq i \leq n.$$

- $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$  est un espace vectoriel donc on peut définir la notion de famille libre :  
 $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  sont linéairement indépendants ou encore  
 $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  est une famille libre si et seulement si :

$$\forall (\alpha_i)_{i=1, \dots, p} \quad \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_p X_p = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0.$$

Bien sûr  $X_1, X_2, \dots, X_p, \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_p X_p$  appartiennent à  $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$ , par exemple  $X_1 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})$  où  $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$  sont des fonctions appartenant à  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ .

On rappelle que :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_p X_p = 0 &\iff \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + \dots + \alpha_p X_p(t) = 0 \quad \forall t \in I \\ &\iff \alpha_1 x_{i1}(t) + \alpha_2 x_{i2}(t) + \dots + \alpha_p x_{ip}(t) = 0 \quad \forall t \in I, \forall i \text{ compris entre } 1 \text{ et } n. \end{aligned}$$

- On va introduire une notation qui nous servira par la suite :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n \mid x'(t) = A(t)x(t) \right\}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

On peut montrer en exercice que  $\mathcal{S}_0$  est un sous espace vectoriel de  $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$ .

- Dans la suite on suppose que  $A(t)$  est une matrice dont tous les coefficients  $a_{ij}(t)$  sont des fonctions continues de  $J \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $J$  est un intervalle fermé borné contenant  $I$ .

## Notations

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.3.2 Système homogène

**Exercices :**  
[Exercice A.1.4](#)

**Documents :**  
[Document B.1.1](#)

**Cours :**  
[Notations](#)

**Proposition 6.3.1.** *Soit :*

- $t_0 \in I$ ,
- $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

*Alors il existe un unique  $x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$  tel que*

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Voir la démonstration de cette proposition en document.

**Proposition 6.3.2.** *L'ensemble des solutions homogènes*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n \mid x'(t) = A(t)x(t) \right\}$$

*est un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$  de dimension  $n$ .*

*Donc toute solution de  $x'(t) = A(t)x(t)$  peut s'écrire sous la forme*

$$x = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n,$$

*où  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  solutions de  $x'(t) = A(t)x(t)$  linéairement indépendantes.*

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

*Démonstration* – On définit l'application  $u : x \mapsto \xi$  de  $\mathcal{S}_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ , qui à  $x \in \mathcal{S}_0$  associe  $\xi = x(t_0)$ , on a donc  $u(x) = x(t_0)$ . Cette application est bien définie d'après la Proposition 6.3.1.

— L'application  $u$  est linéaire.

En effet,  $u(\lambda\phi + \mu\psi) = (\lambda\phi + \mu\psi)(t_0) = \lambda\phi(t_0) + \mu\psi(t_0) = \lambda u(\phi) + \mu u(\psi)$ .

—  $u$  est injective, en effet la solution du système  $x'(t) = A(t)x(t)$  est unique pour une condition initiale donnée, donc si  $\phi(t_0) = 0$ , alors  $\phi = 0$ , donc  $\text{Ker } u = \{0\}$ .

—  $u$  est surjective, en effet pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  il existe une solution  $\phi$  au système différentiel  $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$  qui vérifie  $\phi(t_0) = \xi$ , donc  $u(\phi) = \xi$ .

— L'application  $u$  est donc un isomorphisme de  $\mathcal{S}_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ , ce qui démontre que la dimension  $\mathcal{S}_0$  est égale à la dimension de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire  $n$ .

## Système homogène

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### 6.3.3 Systèmes différentiels avec second membre

**Exercices :**  
[Exercice A.1.5](#)

**Cours :**  
[Notations](#)  
Système homogène

**Proposition 6.3.3.** Soit  $g \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}))^n$ . La solution générale de l'équation

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$$

s'écrit

$$x = x_p + x_h,$$

où  $x_p$  est une solution particulière qui vérifie :

$$x'_p(t) = A(t)x_p(t) + g(t)$$

et où  $x_h$  est la solution générale du système homogène correspondant, donc

$$x_h = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n,$$

où  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  solutions linéairement indépendantes du système homogène.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

*Démonstration* – On peut démontrer, comme pour les systèmes homogènes, qu’il existe au moins une solution à l’équation

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t).$$

Cette solution est unique si on fixe  $x(t_0)$ . Appelons  $x_p$  une solution particulière.

$x - x_p$  vérifie l’équation homogène

$$(x - x_p)'(t) = A(t)(x - x_p)(t),$$

ce qui implique que  $x - x_p \in \mathcal{S}_0$  et donc

$$x - x_p = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n,$$

d’où le résultat.

## Systèmes différentiels avec second membre

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.4 Systèmes à coefficients constants

|       |                                                                         |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.4.1 | Systèmes homogènes à coefficients constants avec $A$ diagonalisable . . | 20 |
| 6.4.2 | Systèmes homogènes à coefficients constants avec $A$ non diagonalisable | 22 |
| 6.4.3 | Systèmes non homogènes à coefficients constants . . . . .               | 23 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.4.1 Systèmes homogènes à coefficients constants avec $A$ diagonalisable

**Exercices :**[Exercice A.1.6](#)[Exercice A.1.7](#)

Dans toute cette section on supposera que la matrice  $A$  ne dépend pas de  $t$ .

Traiter l'Exercice [A.1.6](#). On voit alors que le système différentiel est très facile à résoudre lorsque la matrice  $A$  est diagonale. En fait, on peut se ramener à ce cas très simple dès que  $A$  est diagonalisable. En effet, on a alors la relation

$$A = PDP^{-1}$$

où

- $D$  est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres  $\lambda_i$ ,
  - $P$  est une matrice inversible formée des vecteurs propres de  $A$ ,  $P = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \end{pmatrix}$ ,
- et on peut réécrire le système  $x'(t) = Ax(t)$  sous la forme

$$x'(t) = PDP^{-1}x(t),$$

soit en multipliant à gauche par  $P^{-1}$  et en posant  $z(t) = P^{-1}x(t)$

$$z'(t) = Dz(t).$$

**Remarque :** noter que l'on a utilisé le fait que  $A$  est constante. En effet,

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , l'équation  $z_i'(t) = \lambda_i z_i(t)$  se résout indépendamment pour donner

$$z_i(t) = \alpha_i e^{\lambda_i t},$$

d'où le résultat

$$x(t) = Pz(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} Y_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} Y_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} Y_n.$$

**Proposition 6.4.1.** *Si la matrice  $A$  est diagonalisable, alors toute solution de*

$$x'(t) = Ax(t)$$

*s'écrit sous la forme*

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} Y_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} Y_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} Y_n,$$

*où  $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$  sont les valeurs propres de  $A$  et  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  une base de vecteurs propres correspondants.*

**Systèmes  
homogènes à  
coefficients  
constants avec  $A$   
diagonalisable**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.4.2 Systèmes homogènes à coefficients constants avec $A$ non diagonalisable

Exercices :

[Exercice A.1.8](#)

On a montré que  $A$  est toujours trigonalisable dans  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $T$  triangulaire supérieure et  $P$  inversible telles que  $T = P^{-1}AP$  (la matrice  $T$  peut être éventuellement écrite sous forme de Jordan), donc

$$x'(t) = Ax(t) \iff x'(t) = PTP^{-1}x(t) \iff z'(t) = Tz(t),$$

où  $z(t) = P^{-1}x(t)$ . On a donc

$$\begin{cases} z_1'(t) = \lambda_1 z_1(t) + t_{12}z_2(t) + \dots + t_{1n}z_n(t) \\ z_2'(t) = \lambda_2 z_2(t) + \dots + t_{2n}z_n(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) = \lambda_n z_n(t) \end{cases},$$

avec sur la diagonale de  $T$  les valeurs propres de  $A$ . On peut alors résoudre ce système en commençant par résoudre la dernière équation, puis on remplace  $z_n$  par sa valeur dans l'équation précédente que l'on peut alors résoudre, etc.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.4.3 Systèmes non homogènes à coefficients constants

Exercices :

[Exercice A.1.9](#)

On veut résoudre

$$x'(t) = Ax(t) + g(t).$$

On suppose qu'il existe une matrice  $\hat{A}$  qui est semblable à  $A$ , c'est-à-dire  $\hat{A} = P^{-1}AP$ , on a donc :

$$\begin{aligned} x'(t) = P\hat{A}P^{-1}x(t) + g(t) &\iff P^{-1}x'(t) = \hat{A}P^{-1}x(t) + P^{-1}g(t) \\ &\iff z'(t) = \hat{A}z(t) + \hat{g}(t), \\ \text{où } z(t) = P^{-1}x(t), \quad \hat{g}(t) &= P^{-1}g(t). \end{aligned}$$

Si  $\hat{A}$  est diagonale ou triangulaire, on sait résoudre ce dernier système, ce qui permet d'obtenir  $z$ .

On en déduit  $x$  par

$$x(t) = Pz(t).$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.5 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

|       |                                                                   |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------|----|
| 6.5.1 | Rappels . . . . .                                                 | 25 |
| 6.5.2 | Solutions d'une équation différentielle du second ordre . . . . . | 26 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.5.1 Rappels

### Exercices :

[Exercice A.1.10](#)

C6-1-11

On veut résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (6.5.1)$$

Vous avez vu dans les cours précédents que pour résoudre une telle équation on écrivait le trinôme caractéristique  $as^2 + bs + c$ , dont on cherchait les racines complexes. Deux cas peuvent se présenter :

— Si les deux racines sont distinctes, appelons les  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , alors on a :

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}.$$

— Si les deux racines sont confondues (donc réelles), appelons  $\lambda$  cette racine double, alors on a :

$$y(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t) e^{\lambda t}.$$

Bien sûr, dans le cas de racines distinctes complexes,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes conjuguées. Si l'on cherche une solution réelle, on choisira alors  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  complexes conjugués.

Vous pouvez traiter l'Exercice , vous y trouverez une démonstration dans le cas des racines distinctes.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.5.2 Solutions d'une équation différentielle du second ordre

**Exercices :**

C6-1-12

[Exercice A.1.13](#)**Cours :**[Équations différentielles du second ordre-rappels](#)

Traiter l'Exercice .

On peut démontrer les résultats énoncés dans le paragraphe référencé en utilisant les propriétés des systèmes différentiels. On transforme l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

en un système d'équations différentielles du premier ordre en posant

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t),$$

ce qui donne

$$x'(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

Si l'on calcule les valeurs propres de  $A$  (c'est une matrice Compagnon), on est amené à chercher les racines du polynôme caractéristique

$$\Pi_A(s) = \det(sI - A) = s^2 + \frac{b}{a}s + \frac{c}{a},$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

et l'on retrouve l'équation caractéristique de l'équation différentielle (6.5.1) :

$$as^2 + bs + c = 0. \quad (6.5.2)$$

- Si les deux racines de (6.5.2) sont distinctes, les deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $A$  sont distinctes, la matrice est diagonalisable et l'on a

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} Y_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} Y_2,$$

où les deux vecteurs propres sont

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ et } Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

et puisque  $y(t) = x_1(t)$  on retrouve la solution (bien connue)

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t},$$

où les scalaires  $\alpha_1, \alpha_2$  sont réels ou complexes, suivant que les valeurs propres sont réelles ou complexes.

- Si les deux racines de (6.5.2) sont confondues, alors on a une valeur propre double  $\lambda = -\frac{b}{2a}$ , et un sous-espace propre de dimension 1. Un vecteur propre est donné par

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

que l'on complète, par exemple, avec le vecteur

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Solutions d'une équation différentielle du second ordre

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

pour former une base de  $\mathbb{R}^2$ . Puisque

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} - \left( \lambda + \frac{b}{a} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Y + \lambda U,$$

la matrice  $T$  s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On résout la deuxième équation, ce qui donne  $z_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda t}$ , que l'on reporte dans la première équation, ce qui donne

$$z_1'(t) = \lambda z_1(t) + \alpha_2 e^{\lambda t},$$

dont les solutions sont

$$z_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t}.$$

Si l'on revient alors à  $x = Pz$ , on voit que  $y = x_1 = z_1$ , ce qui redonne les solutions bien connues

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, (\lambda \in \mathbb{R}).$$

## Solutions d'une équation différentielle du second ordre

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.6 Systèmes différentiels à coefficients non constants

|       |                                                                     |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------|----|
| 6.6.1 | <a href="#">Systèmes différentiels à coefficients non constants</a> | 30 |
|-------|---------------------------------------------------------------------|----|

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.6.1 Systèmes différentiels à coefficients non constants

#### Exercices :

[Exercice A.1.14](#)

On veut résoudre le système  $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ . Bien sûr, comme précédemment, si la matrice  $A(t)$  est diagonale, alors la résolution est immédiate puisqu'on doit résoudre la famille d'équations différentielles linéaires indépendantes

$$x'_i(t) = a_{ii}(t)x_i(t) + g_i(t), \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

En revanche, si  $A(t)$  est diagonalisable, est-il toujours possible, comme dans le cas où  $A$  est constante, de se ramener à un système dont la matrice est diagonale? La réponse n'est pas toujours positive. En effet, si  $A$  dépend du temps  $t$  et même si, pour tout  $t$ ,  $A(t)$  est diagonalisable, le changement de base  $P(t)$  dépend du paramètre  $t$ . Ainsi s'il existe une famille de matrices  $P(t)$  régulières telles que

$$D(t) = P^{-1}(t)A(t)P(t)$$

est une matrice diagonale. Alors en posant  $x(t) = P(t)z(t)$ , on obtient

$$P'(t)z(t) + P(t)z'(t) = A(t)P(t)z(t) + g(t),$$

et donc en multipliant à gauche par  $P^{-1}(t)$ , on obtient

$$P^{-1}(t)P'(t)z(t) + z'(t) = D(t)z(t) + P^{-1}(t)g(t)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

et donc on n'est pas ramené à un système dont la matrice est diagonale (à cause du premier terme). Sauf bien sûr dans le cas très particulier où  $P'(t) = 0$ .

L'exemple suivant illustre ce cas : on veut résoudre

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$$

où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2(1-t) \\ t-1 & 2-t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A(t)$  admet  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = t$  comme valeurs propres avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme vecteurs propres associés. Ils sont indépendants de  $t$ , donc, si on pose  $x = Pz$ , on obtient le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_1(t) \\ z_2'(t) = tz_2(t) + t \end{cases}$$

dont on peut résoudre indépendamment les deux équations différentielles.

**Systèmes  
différentiels à  
coefficients non  
constants**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe A

## Exercices

|     |                                   |    |
|-----|-----------------------------------|----|
| A.1 | Exercices du chapitre 6 . . . . . | 33 |
| A.2 | Exercices de TD . . . . .         | 48 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## A.1 Exercices du chapitre 6

|        |                                                                             |    |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| A.1.1  | Ch6-Exercice 1 : mise sous forme de système d'une équadiff d'ordre 2 .      | 34 |
| A.1.2  | Ch6-Exercice 2 : famille libre de 2 fonctions . . . . .                     | 35 |
| A.1.3  | Ch6-Exercice 3 : seV des solutions d'une équadiff linéaire . . . . .        | 36 |
| A.1.4  | Ch6-Exercice 4 : système différentiel linéaire diagonal homogène . . . .    | 37 |
| A.1.5  | Ch6-Exercice 5 : système différentiel linéaire diagonal non homogène .      | 38 |
| A.1.6  | Ch6-Exercice 6 : systdiff linéaire diagonal constant homogène . . . . .     | 39 |
| A.1.7  | Ch6-Exercice 7 : systdiff linéaire diagonalisable constant homogène . .     | 40 |
| A.1.8  | Ch6-Exercice 8 : systdiff linéaire non diagonalisable constant homogène     | 41 |
| A.1.9  | Ch6-Exercice 9 : systdiff linéaire diagonalisable constant non homogène     | 42 |
| A.1.10 | Ch6-Exercice 10 : équadiff linéaire cste d'ordre 2 : résolution 1 . . . . . | 43 |
| A.1.11 | Ch6-Exercice 11 : équadiff linéaire cste d'ordre 2 : sev des sol de dim=2   | 44 |
| A.1.12 | Ch6-Exercice 12 : vp de matrice Compagnon $2 \times 2$ . . . . .            | 45 |
| A.1.13 | Ch6-Exercice 13 : équadiff linéaire cste d'ordre 2 : résolution 2 . . . . . | 46 |
| A.1.14 | Ch6-Exercice 14 : systdiff linéaire non constant non homogène . . . . .     | 47 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.1** Ch6-Exercice 1 : mise sous forme de système d'une équadiff d'ordre 2

On veut résoudre

$$z''(t) + b(t)z'(t) + c(t)z(t) = 0, \quad b, c \text{ étant des fonctions réelles.}$$

Transformer cette équation différentielle du second ordre en un système d'équations différentielles du premier ordre.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.2** Ch6-Exercice 2 : famille libre de 2 fonctions

On définit les fonctions  $X_1, X_2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$  par  $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\cos t} \end{pmatrix}$ . Montrer que  $(X_1, X_2)$  est une famille libre de  $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$ .

[retour au cours](#)[Solution](#)[Sommaire](#)  
[Concepts](#)[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.3** Ch6-Exercice 3 : seV des solutions d'une équadiff linéaire

On définit  $\mathcal{S}_0 = \{x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n \mid x'(t) = A(t)x(t)\}$ .

Montrer que  $\mathcal{S}_0$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.4** Ch6-Exercice 4 : système différentiel linéaire diagonal homogène

Soit la matrice diagonale et dépendant de  $t$  définie par  $A(t) = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}$ .

Résoudre le système différentiel linéaire homogène

$$x'(t) = A(t)x(t).$$

Montrer que l'on peut écrire  $x(t) = \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t)$ ,

où  $X_1, X_2$  sont 2 solutions linéairement indépendantes de  $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.5** Ch6-Exercice 5 : système différentiel linéaire diagonal non homogène

Soit la matrice diagonale  $A(t) = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}$  et la fonction  $g(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1 - t \sin t \end{pmatrix}$ .

Résoudre le système différentiel linéaire non homogène

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t).$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.6** Ch6-Exercice 6 : systdiff linéaire diagonal constant homogène

Soit la matrice diagonale  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Résoudre le système différentiel linéaire et constant homogène

$$x'(t) = Ax(t).$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.7** Ch6-Exercice 7 : systdiff linéaire diagonalisable constant homogène

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Résoudre le système différentiel linéaire et constant homogène

$$x'(t) = Ax(t).$$

[retour au cours](#)[Solution](#)[Sommaire](#)  
[Concepts](#)[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.8** Ch6-Exercice 8 : systdiff linéaire non diagonalisable constant homogène

On définit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable.

On note  $Y_1$  un vecteur propre de  $A$ , on choisit  $Y_2$  un vecteur quelconque tel que  $(Y_1, Y_2)$  soit une famille libre. On définit  $P = (Y_1 \ Y_2)$ .  $P$  est inversible. (Pourquoi?)

1. Montrer que  $T = P^{-1}AP$  est une matrice triangulaire supérieure qui vérifie

$$t_{11} = t_{22} = 2.$$

2. Résoudre le système différentiel linéaire et constant homogène avec une matrice non diagonalisable

$$x'(t) = Ax(t).$$

[retour au cours](#)

**Solution**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.9** Ch6-Exercice 9 : systdiff linéaire diagonalisable constant non homogène

Résoudre le système différentiel linéaire et constant, non homogène

$$x'(t) = Ax(t) + g(t), \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.10** Ch6-Exercice 10 : équadiff linéaire cste d'ordre 2 : résolution 1

Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène et à coefficients constants et réels

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Donner les solutions dans  $\mathbb{C}$  puis dans  $\mathbb{R}$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.11** Ch6-Exercice 11 : équadiff linéaire cste d'ordre 2 : sev des sol de dim=2

Soient  $t_0$ ,  $a$ ,  $b$  et  $c$  des réels fixés et on suppose  $a \neq 0$ . On admettra que pour tout couple  $(y_0, y_1)$  donné, il existe une et une seule fonction  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = y_0. \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

On note  $S_0 = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}\}$

On appelle  $u$  l'application de  $S_0$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui à  $y$  associe  $(y_0, y_1)$  définis par  $y_0 = y(t_0)$ ,  $y_1 = y'(t_0)$ .

1. Montrer que  $S_0$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $u$  est linéaire.
3. Montrer que  $u$  est bijective de  $S_0$  dans  $\mathbb{R}^2$ .
4. En déduire que la dimension de  $S_0$  est 2.
5. Si  $\lambda$  vérifie  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ , montrer que la fonction  $y$  définie par  $y(t) = e^{\lambda t}$  appartient à  $S_0$ .
6. On suppose qu'il existe 2 racines distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de l'équation  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ .  
Montrer que  $e^{\lambda_1 t}$  et  $e^{\lambda_2 t}$  sont 2 fonctions linéairement indépendantes de  $S_0$ .
7. En déduire que  $\forall y \in S_0$ ,  $y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.12** Ch6-Exercice 12 : vp de matrice Compagnon  $2 \times 2$ 

1. Soient  $\beta$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Quel est le polynôme caractéristique de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\beta \end{pmatrix}$ ?
2. Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé.
3. Montrer que si  $A$  admet une valeur propre double, elle n'est pas diagonalisable.

[retour au cours](#)[Solution](#)[Sommaire](#)  
[Concepts](#)[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.13** Ch6-Exercice 13 : équadiff linéaire cste d'ordre 2 : résolution 2

Mettre l'équation différentielle  $y'' - 2y' + 2y = 0$  sous forme d'un système différentiel du premier ordre, puis le résoudre dans  $\mathbb{C}$ . Comparer avec les résultats obtenus dans l'Exercice [A.1.10](#).

[retour au cours](#)[Solution](#)[Sommaire](#)  
[Concepts](#)[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.14** Ch6-Exercice 14 : systdiff linéaire non constant non homogène

Résoudre le système :

$$\begin{cases} z_1'(t) &= z_1(t), \\ z_2'(t) &= t z_2(t) + t. \end{cases}$$

En déduire la solution du système différentiel  $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ , avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2(1-t) \\ t-1 & 2-t \end{pmatrix} \text{ et } g(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## A.2 Exercices de TD

|       |                                                                           |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------------|----|
| A.2.1 | TD6-Exercice 1 : systdiff linéaire cst homogène diagonalisable . . . . .  | 49 |
| A.2.2 | TD6-Exercice 2 : systdiff linéaire cst homogène non diagonalisable . . .  | 50 |
| A.2.3 | TD6-Exercice 3 : systdiff linéaire cst homogène diagonalisable dans $C$ . | 51 |
| A.2.4 | TD6-Exercice 4 : systdiff linéaire cst non homogène diagonalisable : 1 .  | 52 |
| A.2.5 | TD6-Exercice 5 : systdiff linéaire cst non homogène diagonalisable : 2 .  | 53 |

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.1** TD6-Exercice 1 : systdiff linéaire cst homogène diagonalisable

Soit le système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1(0) = \alpha \\ x_2(0) = \beta \\ x_3(0) = \gamma \end{cases}. \quad (\text{A.2.1})$$

1. Montrer que (A.2.1) peut se mettre sous la forme

$$z' = Dz, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z_1(0) = a \\ z_2(0) = b \\ z_3(0) = c \end{cases}, \quad \text{et } D \text{ matrice diagonale.} \quad (\text{A.2.2})$$

Déterminer  $D$  et les coefficients  $a, b, c$ .

2. Résoudre (A.2.2).

3. En déduire la solution  $x$  de (A.2.1).

$$(\text{Réponse : } \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{6}(\alpha + \beta - 2\gamma) + \frac{1}{6}(5\alpha - \beta + 2\gamma)e^{6t} \\ x_2(t) = \frac{1}{6}(\alpha + \beta - 2\gamma) + \frac{1}{6}(-\alpha + 5\beta + 2\gamma)e^{6t} \\ x_3(t) = -\frac{1}{3}(\alpha + \beta - 2\gamma) + \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)e^{6t} \end{cases}).$$

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.2** TD6-Exercice 2 : systdiff linéaire cst homogène non diagonalisable

Soit le système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 + 2x_3 \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1(0) = \alpha \\ x_2(0) = \beta \\ x_3(0) = \gamma \end{cases}. \quad (\text{A.2.3})$$

1. Montrer que (A.2.3) peut se mettre sous la forme

$$z' = Tz, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z_1(0) = a \\ z_2(0) = b \\ z_3(0) = c \end{cases}, \quad \text{et } T \text{ matrice de Jordan.} \quad (\text{A.2.4})$$

2. Résoudre (A.2.4), puis donnez la solution de (A.2.3).

$$(\text{Réponses : } \begin{cases} x_1(t) = \alpha e^t + (\beta - \gamma) t e^t \\ x_2(t) = (\alpha + \beta) e^{2t} - \alpha e^t + (-\beta + \gamma) t e^t \\ x_3(t) = (\alpha + \beta) e^{2t} + (-\alpha - \beta + \gamma) e^t + (-\beta + \gamma) t e^t \end{cases}).$$

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.3** TD6-Exercice 3 : systdiff linéaire cst homogène diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ 

Soit le système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = -2x_1 - x_2 \end{cases} . \quad (\text{A.2.5})$$

1. Montrer que (A.2.5) peut se mettre sous la forme

$$z' = Dz, \quad \text{avec } D \text{ matrice diagonale.} \quad (\text{A.2.6})$$

2. Résoudre (A.2.6).
3. En déduire les solutions réelles  $x$  de (A.2.5).

(Réponses :  $A = PDP^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ )

et  $\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 \cos t - \beta_1 \sin t \\ x_2(t) = -(\alpha_1 + \beta_1) \cos t + (-\alpha_1 + \beta_1) \sin t \end{cases}$ ).

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.4** TD6-Exercice 4 : systdiff linéaire cst non homogène diagonalisable : 1

Soit le système différentiel du 1<sup>er</sup> ordre linéaire, constant et non homogène :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + e^t \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + t \end{cases} \quad (\text{A.2.7})$$

1. Montrer que (A.2.7) peut se mettre sous la forme

$$z' = Dz + g, \quad \text{avec } D \text{ diagonale et } g \text{ fonction : } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (\text{A.2.8})$$

Déterminer  $D$  et la fonction  $g$ .

2. Résoudre (A.2.8).
3. En déduire les solutions  $x$  de (A.2.7).

$$(\text{Réponses : } \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{2}{3}t + \frac{4}{9} \\ x_2(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3}t - \frac{5}{9} \end{cases} ).$$

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.5** TD6-Exercice 5 : systdiff linéaire cst non homogène diagonalisable : 2

1. Soit le système différentiel du 1<sup>er</sup> ordre linéaire, constant et non homogène :

$$\begin{cases} x_1'(t) = & x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) & +2\cosh t \end{cases} \quad (\text{A.2.9})$$

- (a) Montrer que (A.2.9) peut se mettre sous la forme

$$z' = Dz + g, \quad \text{avec } D \text{ diagonale et } g \text{ fonction : } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (\text{A.2.10})$$

Déterminer  $D$  et la fonction  $g$ .

- (b) Résoudre (A.2.10).

- (c) En déduire la solution  $x$  de (A.2.9).

$$(\text{Réponses : } \begin{cases} x_1(t) = (C_1 - \frac{1}{4})e^{-t} + (C_2 - \frac{1}{4})e^t + t \sinh t \\ x_2(t) = (-C_1 - \frac{1}{4})e^{-t} + (C_2 + \frac{1}{4})e^t + t \cosh t \end{cases} ).$$

2. Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y''(t) = y(t) + 2\cosh t.$$

Comparer avec ce qui a été trouvé précédemment.

Question 1b [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 1c [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 2 [Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe B

## Documents

|     |                                   |    |
|-----|-----------------------------------|----|
| B.1 | Documents du chapitre 6 . . . . . | 55 |
|-----|-----------------------------------|----|

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## B.1 Documents du chapitre 6

B.1.1 Existence et unicité de la solution d'un système différentiel linéaire . . 56

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Document B.1.1 Existence et unicité de la solution d'un système différentiel linéaire

- Soit  $I$  un intervalle ouvert, non vide et borné de  $\mathbb{R}$ .
- On note  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continuellement dérivables sur  $I$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $J$  un intervalle fermé borné contenant  $I$ ,
- soit  $A(t)$  une matrice dont tous les coefficients  $a_{ij}(t)$  sont des fonctions continues de  $J$  dans  $\mathbb{R}$ ,
- soit  $t_0 \in I$ ,
- soit  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

Alors il existe un unique  $x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$  tel que

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

*Démonstration –*

L'existence et l'unicité proviennent du Théorème de Cauchy-Lipschitz. D'une part, le second membre  $f(t, x) = A(t)x$  est continu puisque les éléments de la matrice sont des fonctions continues. D'autre part, le second membre vérifie la condition de Lipschitz. En effet, les fonctions  $a_{ij}(t)$  sont continues sur un intervalle  $J$  ( $I \subset J$ ) fermé borné, donc  $|a_{ij}(t)| \leq M$ ,  $\forall t \in I$ , pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Alors

$$\begin{aligned} \|A(t)(x - z)\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_j - z_j) \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n (a_{ij}(t))^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n M^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2 \right) = n^2 M^2 \|x - z\|^2, \end{aligned}$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\left\langle \left(\underline{A_i}(t)\right)^T, x - z \right\rangle^2 = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_j - z_j) \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n (a_{ij}(t))^2 \sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2 = \left\| \left(\underline{A_i}(t)\right)^T \right\|^2 \|x - z\|^2.$$

[retour au cours](#)

### Document B.1.1

Existence et  
unicité de la  
solution d'un  
système  
différentiel  
linéaire

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

# Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini;  
l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple;  
le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

## Symbols

Équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  . . . . **10**  
Équations différentielles du second ordre-rappels  
**25, 26**  
Équations différentielles du second ordre-solution  
**26**  
Équations différentielles, existence et unicité des  
solutions . . . . . **4**

## C

Cauchy-Lipschitz, théorème . . . . . **6**

## N

Notations . . . . . **13, 15, 17**

## S

Système d'équations différentielles linéaires, définition . . . . . **8**  
Système différentiel à coefficients non constants  
**30**  
Système homogène . . . . . **15**  
Systèmes différentiels avec second membre . **17**  
Systèmes homogènes à coefficients constants avec  
A diagonalisable . . . . . **20**  
Systèmes homogènes à coefficients constants avec  
A non diagonalisable . . . . . **22**  
Systèmes non homogènes à coefficients constants  
**23**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Solution de l'exercice A.1.1

On pose

$$\begin{aligned}x_1(t) &= z(t), \\x_2(t) &= z'(t),\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -b(t)x_2(t) - c(t)x_1(t) \end{cases} \iff x'(t) = A(t)x(t) \text{ avec } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(t) & -b(t) \end{pmatrix}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.2

On remarque tout d'abord que  $X_1$  et  $X_2$  appartiennent à  $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$ .

D'autre part, soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dans  $\mathbb{R}$  tels que

$$\begin{aligned}\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0 &\implies \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{t^2} \\ \alpha_2 e^{-\cos t} \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &\implies \begin{cases} \alpha_1 e^{t^2} = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \\ \alpha_2 e^{-\cos t} = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} .\end{aligned}$$

(Il suffit de choisir  $t = 0$ .)

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.3

$S_0$  n'est pas vide, car  $0 \in S_0$  et  $S_0$  est stable.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.4

$$\begin{aligned}x'(t) = A(t)x(t) &\iff \begin{cases} x'_1(t) = 2t x_1(t) \\ x'_2(t) = \sin t x_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{t^2} \\ x_2(t) = \alpha_2 e^{-\cos t} \end{cases} \\ &\iff x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\cos t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On retrouve les fonctions  $X_1, X_2$  définies dans l'Exercice 2 et on a montré qu'elles étaient linéairement indépendantes.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.5

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \iff \begin{cases} x_1'(t) = 2t x_1(t) - t \\ x_2'(t) = \sin t x_2(t) + 1 - t \sin t \end{cases} .$$

On obtient deux équations différentielles indépendantes avec second membre. On résout les équations sans second membre, on obtient

$$x_{1h}(t) = \alpha_1 e^{t^2}, \quad x_{2h}(t) = \alpha_2 e^{-\cos t}.$$

En réfléchissant un peu on trouve une solution particulière pour chacune des équations qui sont

$$x_{1p}(t) = \frac{1}{2}, \quad x_{2p}(t) = t.$$

D'où la solution

$$x(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\cos t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.6

$$x'(t) = Ax(t) \iff \begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) \\ x_2'(t) &= 3x_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) &= \alpha_1 e^{2t} \\ x_2(t) &= \alpha_2 e^{3t} \end{cases} \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.7

On calcule les valeurs propres de  $A$  et on obtient  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 3$ . On calcule des vecteurs propres associés, on obtient

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

donc si on note

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

on a  $A = PDP^{-1}$ , donc

$$x'(t) = Ax(t) \iff P^{-1}x'(t) = DP^{-1}x(t).$$

Si l'on pose  $z(t) = P^{-1}x(t)$ , on a donc en utilisant l'exercice précédent :

$$z'(t) = Dz(t) \iff \begin{cases} z_1(t) &= \alpha_1 e^{2t} \\ z_2(t) &= \alpha_2 e^{3t} \end{cases}.$$

On obtient enfin

$$x(t) = Pz(t) \iff \begin{cases} x_1(t) &= \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{3t} \\ x_2(t) &= -\alpha_1 e^{2t} - 2\alpha_2 e^{3t} \end{cases}, \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.8

On calcule les valeurs propres de  $A$ , on obtient que 2 est valeur propre double. On détermine les vecteurs propres associés, on obtient un sous espace propre de dimension 1 un vecteur propre est par exemple

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut choisir par exemple  $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

La matrice  $P$  est inversible puisque  $(Y_1, Y_2)$  forme une base de  $\mathbb{R}^2$ .

1. On note  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui à  $x$  associe  $Ax$ . La matrice de  $f$  dans la base canonique est bien sûr  $A$ . D'autre part  $AY_1 = 2Y_1$ , donc la matrice de  $f$  dans la base  $(Y_1, Y_2)$  est  $T = \begin{pmatrix} 2 & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}$ , d'autre part cette matrice est semblable à  $A$  ( $T = P^{-1}AP$ ), donc elle admet les mêmes valeurs propres donc  $t_{22} = 2$ , ce qui termine la démonstration.
2. On peut maintenant déterminer  $t_{12}$ . On calcule  $AY_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = Y_1 + 2Y_2$ , on obtient donc  $t_{12} = 1$ , on retrouve bien sûr que  $t_{22} = 2$ . On peut maintenant résoudre le système :

$$x'(t) = Ax(t) \iff z'(t) = Tz(t) \quad \text{avec } z(t) = P^{-1}x(t),$$

on obtient les équations différentielles :

$$\begin{aligned} z_2'(t) &= 2z_2(t) &\iff & z_2(t) = \alpha_2 e^{2t}, \\ z_1'(t) &= 2z_1(t) + z_2(t) &\iff & z_1(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t) e^{2t}. \end{aligned}$$

On obtient enfin

$$x(t) = Pz(t) \iff x(t) = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2 t) e^{2t} \\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 t) e^{2t} \end{pmatrix}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.9

Il y a deux façons de procéder :

- On effectue un changement de fonction inconnue en posant  $z(t) = P^{-1}x(t)$ . On a :

$$x'(t) = Ax(t) + g(t) \iff z'(t) = Dz(t) + P^{-1}g(t) \iff \begin{cases} z_1'(t) &= 2z_1(t) + 4t \\ z_2'(t) &= 3z_2(t) - 3t \end{cases} .$$

On résout chacune des équations différentielles, on ajoute à la solution générale de l'équation sans second membre déjà calculée dans l'exercice précédent, une solution particulière cherchée sous forme polynômiale (du premier degré), on obtient :

$$\begin{cases} z_1(t) &= \alpha_1 e^{2t} - 2t - 1 \\ z_2(t) &= \alpha_2 e^{3t} + t + \frac{1}{3} \end{cases} ,$$

donc  $x(t) = Pz(t)$  donne :

$$\begin{cases} x_1(t) &= \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{3t} - t - \frac{2}{3} \\ x_2(t) &= -\alpha_1 e^{2t} - 2\alpha_2 e^{3t} + \frac{1}{3} \end{cases} .$$

- On utilise les résultats du paragraphe “**Systèmes non homogènes à coefficients constants**”. On connaît déjà la solution générale du système sans second membre (homogène), il reste à calculer une solution particulière. On cherche cette solution  $x_p(t)$  sous forme polynômiale :

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} \beta_1 t + \gamma_1 \\ \beta_2 t + \gamma_2 \end{pmatrix} .$$

On obtient alors les équations vérifiées par  $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  :

$$\begin{cases} \beta_1 & -\beta_2 & & & & = -1 \\ \beta_1 & & -\gamma_1 & +\gamma_2 & & = 0 \\ 2\beta_1 & +4\beta_2 & & & & = -2 \\ & \beta_2 & -2\gamma_1 & +4\gamma_2 & & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta_1 = -1 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_1 = -\frac{2}{3} \\ \gamma_2 = \frac{1}{3} \end{cases} .$$

Ceci donne bien sûr la même solution.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.10

Le trinôme caractéristique  $s^2 - 2s + 2$  a pour racines  $1 + i$  et  $1 - i$ . On obtient donc les solutions complexes :

$$y(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} + \alpha_2 e^{(1-i)t} \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Pour obtenir les solutions réelles, on doit choisir  $\alpha_1, \alpha_2$  complexes conjugués. Par exemple

$$\alpha_1 = a_1 + i a_2, \quad \alpha_2 = a_1 - i a_2, \quad \text{avec } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Après calculs, on obtient les solutions réelles :

$$y(t) = (\beta_1 \cos t + \beta_2 \sin t) e^t, \quad \text{avec } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},$$

où on a posé  $\beta_1 = 2a_1$  et  $\beta_2 = -2a_2$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.11

1.  $S_0$  contient la fonction nulle donc est non vide; on montre d'autre part que  $S_0$  est stable par combinaison linéaire.
2. On montre facilement que  $u(y+z) = u(y) + u(z)$ , et  $u(\alpha y) = \alpha u(y)$ .
3. —  $u$  est surjective : c'est l'existence de la solution du problème

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

qui permet de conclure : en effet, à tout couple  $(y_0, y_1)$  correspond une fonction  $y$  de  $S_0$ .

- $u$  est injective : c'est l'unicité de la solution du même problème qui permet de conclure. En effet, il ne peut exister 2 fonctions distinctes de  $S_0$  qui vérifient  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = y_1$ .
4. Les dimensions des 2 espaces vectoriels  $S_0$  et  $\mathbb{R}^2$  sont donc égales.
  5. Il suffit de calculer  $ay''(t) + by'(t) + cy(t)$ .
  6. Tout d'abord, les fonctions  $y_1$  et  $y_2$  définies par  $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$  et  $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$  appartiennent bien à  $S_0$ .  
Montrons que ces fonctions forment une famille libre. Soit  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ . Cela implique que

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Donc en particulier pour  $t = 0$ , on obtient  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ . D'autre part, la dérivée de cette fonction est également nulle, et si on évalue la dérivée en  $t = 0$ , on obtient  $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 = 0$ .

On a donc obtenu deux équations linéaires dont les inconnues sont  $\alpha_1, \alpha_2$ , le déterminant de la matrice du système vaut  $\lambda_1 - \lambda_2$ , il est donc différent de 0. Donc ce système admet une solution unique  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . La famille de fonctions  $(y_1, y_2)$  est donc libre.

7. On en déduit que  $(y_1, y_2)$  est une base de  $S_0$ , donc toute fonction  $y$  de  $S_0$  se décompose sur cette base.

## Solution de l'exercice A.1.12

1.  $\Pi_A(s) = s^2 + \beta s + \gamma$  ( $A$  est une matrice Compagnon, voir l'Exercice 2 du TD4).

2.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\gamma - \beta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$ . (On rappelle que  $\lambda$  vérifie  $\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$ ).

3. Comme on l'a déjà vu : si  $A$  admettait une valeur propre double  $\lambda$  et si  $A$  était diagonalisable, alors  $A$  serait semblable à  $\lambda I$  et on aurait  $A = P^{-1}(\lambda I)P = \lambda I$ , ce qui n'est pas vrai.

Une autre façon de démontrer le résultat serait :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\gamma & -\beta - \lambda \end{pmatrix},$$

donc  $\text{rang}(A - \lambda I) \geq 1$ , donc  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) \leq 1$ , donc la dimension de  $V_\lambda$  n'est pas égale à la multiplicité de la valeur propre (double)  $\lambda$ , donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.13

On pose  $x_1 = y$  et  $x_2 = y'$ , on a alors :

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \iff \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases} \iff x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x(t).$$

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  admet 2 valeurs propres  $1 + i$  et  $1 - i$ , des vecteurs propres correspondants sont

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}.$$

On définit comme d'habitude  $P = (Y_1 \ Y_2)$  et  $x = Pz$ . On résout

$$\begin{cases} z_1'(t) = (1 + i)z_1(t) \\ z_2'(t) = (1 - i)z_2(t) \end{cases},$$

on obtient

$$\begin{cases} z_1(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} \\ z_2(t) = \alpha_2 e^{(1-i)t} \end{cases}.$$

Enfin

$$x = Pz \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} + \alpha_2 e^{(1-i)t} \\ x_2(t) = \alpha_1 (1 + i) e^{(1+i)t} + \alpha_2 (1 - i) e^{(1-i)t} \end{cases}.$$

On retrouve bien sûr  $y = x_1$  et on vérifie que  $y' = x_2$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.14

On a vu dans le cours que la matrice  $A(t)$  admet  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = t$  comme valeurs propres avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme vecteurs propres associés, indépendants de  $t$ .

Donc, si on pose  $x(t) = Pz(t)$ , on a

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \iff \begin{cases} z_1'(t) &= z_1(t), \\ z_2'(t) &= t z_2(t) + t. \end{cases} \iff \begin{cases} z_1(t) &= \alpha_1 e^t \\ z_2(t) &= \alpha_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \end{cases}.$$

D'où

$$x(t) = Pz(t) \iff \begin{cases} x_1(t) &= \alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 2 \\ x_2(t) &= \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \end{cases}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.1

Voir le paragraphe “[Systèmes homogènes à coefficients constants avec  \$A\$  diagonalisable](#)”.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.1

Écrire la matrice du système, elle a déjà été étudiée dans l'Exercice 7 du TD5. Utiliser les résultats trouvés alors.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Exercice A.2.1

Montrer que l'on obtient trois équations différentielles faisant intervenir respectivement  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .  
Résoudre ces trois équations.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.2

Voir le paragraphe “[Systèmes homogènes à coefficients constants avec  \$A\$  non diagonalisable](#)”.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.2

Écrire la matrice du système, elle a déjà été étudiée dans l'Exercice 11 du TD4. Utiliser les résultats trouvés alors.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.2

Vous avez appris en MT91 que la solution générale d'une équation linéaire non homogène est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.2

Quand le second membre est de type  $e^{at}$ , on cherche la solution particulière sous forme  $\alpha e^{at}$ , sauf si  $e^{at}$  est solution de l'équation homogène, dans ce cas on cherche la solution particulière sous forme  $\alpha t e^{at}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.3

Voir le paragraphe “[Systèmes homogènes à coefficients constants avec  \$A\$  diagonalisable](#)”.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.3

La recherche des solutions complexes se fait comme dans les exercices précédents.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Exercice A.2.3

N'oubliez pas que la somme de 2 complexes conjugués est réelle, choisissez donc les constantes complexes de façon astucieuse.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Exercice A.2.3

Vous pouvez vous inspirer du corrigé de l'Exercice [A.1.10](#) du cours.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.4

Voir le paragraphe “[Systèmes non homogènes à coefficients constants](#)”.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.4

Étudier rapidement la matrice  $A$  du système, elle est diagonalisable. Pourquoi?

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 1, Exercice A.2.4

Montrer que  $A = PDP^{-1}$  avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.4

Vous avez appris en MT91 que la solution générale d'une équation linéaire non homogène est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.4

Quand le second membre est polynômial, on cherche la solution particulière sous forme polynômiale, quand le second membre est exponentiel on cherche la solution particulière sous forme exponentielle. Lorsque le second membre est une somme de termes on peut ajouter les solutions particulières correspondant à chacun d'eux.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.5

Voir le paragraphe “[Systèmes non homogènes à coefficients constants](#)”.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.5

Montrer que la matrice  $A$  est diagonalisable et s'écrit  $A = PDP^{-1}$  avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1c, Exercice A.2.5

Vous avez appris en MT91 que la solution générale d'une équation linéaire non homogène est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1c, Exercice A.2.5

Lorsque le second membre est une somme de termes, on peut ajouter les solutions particulières correspondant à chacun d'eux.

Quand le second membre est  $e^{at}$ , on cherche la solution particulière sous forme  $\alpha e^{at}$ , sauf si  $e^{at}$  est solution de l'équation homogène, dans ce cas on cherche la solution particulière sous forme  $\alpha t e^{at}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 1c, Exercice A.2.5

Quelle relation lie  $x_1, x_2$  et  $y$ ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.5

Voir le paragraphe “[Équations différentielles du second ordre-rappels](#)”.

[Retour à l'exercice ▲](#)