

Exercices du chapitre 6 avec corrigé succinct

Exercice VI.1 Ch6-Exercice 1 : mise sous forme de système d'une équadiff d'ordre 2

On veut résoudre

$$z''(t) + b(t)z'(t) + c(t)z(t) = 0, \quad b, c \text{ étant des fonctions réelles.}$$

Transformer cette équation différentielle du second ordre en un système d'équations différentielles du premier ordre.

Solution : On pose

$$\begin{aligned}x_1(t) &= z(t), \\x_2(t) &= z'(t),\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -b(t)x_2(t) - c(t)x_1(t) \end{cases} \iff x'(t) = A(t)x(t) \text{ avec } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(t) & -b(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice VI.2 Ch6-Exercice 2 : famille libre de 2 fonctions

On définit les fonctions X_1, X_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\cos t} \end{pmatrix}$. Montrer que (X_1, X_2) est une famille libre de $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$.

Solution : On remarque tout d'abord que X_1 et X_2 appartiennent à $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$.
D'autre part, soient α_1 et α_2 dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0 &\implies \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{t^2} \\ \alpha_2 e^{-\cos t} \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &\implies \begin{cases} \alpha_1 e^{t^2} = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \\ \alpha_2 e^{-\cos t} = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

(Il suffit de choisir $t = 0$.)

Exercice VI.3 Ch6-Exercice 3 : seV des solutions d'une équadiff linéaire

On définit $\mathcal{S}_0 = \{x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n \mid x'(t) = A(t)x(t)\}$.

Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$.

Solution : S_0 n'est pas vide, car $0 \in S_0$ et S_0 est stable.

Exercice VI.4 Ch6-Exercice 4 : système différentiel linéaire diagonal homogène

Soit la matrice diagonale et dépendant de t définie par $A(t) = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}$.

Résoudre le système différentiel linéaire homogène

$$x'(t) = A(t)x(t).$$

Montrer que l'on peut écrire $x(t) = \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t)$,

où X_1, X_2 sont 2 solutions linéairement indépendantes de $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$.

Solution :

$$\begin{aligned}x'(t) = A(t)x(t) &\iff \begin{cases} x'_1(t) = 2t x_1(t) \\ x'_2(t) = \sin t x_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{t^2} \\ x_2(t) = \alpha_2 e^{-\cos t} \end{cases} \\ &\iff x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\cos t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On retrouve les fonctions X_1, X_2 définies dans l'Exercice 2 et on a montré qu'elles étaient linéairement indépendantes.

Exercice VI.5 Ch6-Exercice 5 : système différentiel linéaire diagonal non homogène

Soit la matrice diagonale $A(t) = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}$ et la fonction $g(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1 - t \sin t \end{pmatrix}$.

Résoudre le système différentiel linéaire non homogène

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t).$$

Solution :

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \iff \begin{cases} x'_1(t) = 2t x_1(t) - t \\ x'_2(t) = \sin t x_2(t) + 1 - t \sin t \end{cases}.$$

On obtient deux équations différentielles indépendantes avec second membre. On résout les équations sans second membre, on obtient

$$x_{1h}(t) = \alpha_1 e^{t^2}, \quad x_{2h}(t) = \alpha_2 e^{-\cos t}.$$

En réfléchissant un peu on trouve une solution particulière pour chacune des équations qui sont

$$x_{1p}(t) = \frac{1}{2}, \quad x_{2p}(t) = t.$$

D'où la solution

$$x(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\cos t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}.$$

Exercice VI.6 Ch6-Exercice 6 : systdiff linéaire diagonal constant homogène

Soit la matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Résoudre le système différentiel linéaire et constant homogène

$$x'(t) = Ax(t).$$

Solution :

$$x'(t) = Ax(t) \iff \begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) \\ x'_2(t) = 3x_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{2t} \\ x_2(t) = \alpha_2 e^{3t} \end{cases} \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice VI.7 Ch6-Exercice 7 : systdiff linéaire diagonalisable constant homogène

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Résoudre le système différentiel linéaire et constant homogène

$$x'(t) = Ax(t).$$

Solution : On calcule les valeurs propres de A et on obtient $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$. On calcule des vecteurs propres associés, on obtient

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

donc si on note

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

on a $A = PDP^{-1}$, donc

$$x'(t) = Ax(t) \iff P^{-1}x'(t) = DP^{-1}x(t).$$

Si l'on pose $z(t) = P^{-1}x(t)$, on a donc en utilisant l'exercice précédent :

$$z'(t) = Dz(t) \iff \begin{cases} z_1(t) = \alpha_1 e^{2t} \\ z_2(t) = \alpha_2 e^{3t} \end{cases}.$$

On obtient enfin

$$x(t) = Pz(t) \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{3t} \\ x_2(t) = -\alpha_1 e^{2t} - 2\alpha_2 e^{3t} \end{cases}, \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice VI.8 Ch6-Exercice 8 : systdiff linéaire non diagonalisable constant homogène

On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

On note Y_1 un vecteur propre de A , on choisit Y_2 un vecteur quelconque tel que (Y_1, Y_2) soit une famille libre. On définit $P = (Y_1 \ Y_2)$. P est inversible. (Pourquoi?)

1. Montrer que $T = P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire supérieure qui vérifie

$$t_{11} = t_{22} = 2.$$

2. Résoudre le système différentiel linéaire et constant homogène avec une matrice non diagonalisable

$$x'(t) = Ax(t).$$

Solution : On calcule les valeurs propres de A , on obtient que 2 est valeur propre double. On détermine les vecteurs propres associés, on obtient un sous espace propre de dimension 1 un vecteur propre est par exemple

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut choisir par exemple $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice P est inversible puisque (Y_1, Y_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$.

1. On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à x associe Ax . La matrice de f dans la base canonique est bien sûr A . D'autre part $AY_1 = 2Y_1$, donc la matrice de f dans la base (Y_1, Y_2) est $T = \begin{pmatrix} 2 & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}$, d'autre part cette matrice est semblable à A ($T = P^{-1}AP$), donc elle admet les mêmes valeurs propres donc $t_{22} = 2$, ce qui termine la démonstration.
2. On peut maintenant déterminer t_{12} . On calcule $AY_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = Y_1 + 2Y_2$, on obtient donc $t_{12} = 1$, on retrouve bien sûr que $t_{22} = 2$. On peut maintenant résoudre le système :

$$x'(t) = Ax(t) \iff z'(t) = Tz(t) \quad \text{avec } z(t) = P^{-1}x(t),$$

on obtient les équations différentielles :

$$\begin{aligned} z_2'(t) &= 2z_2(t) &\iff z_2(t) &= \alpha_2 e^{2t}, \\ z_1'(t) &= 2z_1(t) + z_2(t) &\iff z_1(t) &= (\alpha_1 + \alpha_2 t) e^{2t}. \end{aligned}$$

On obtient enfin

$$x(t) = Pz(t) \iff x(t) = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2 t) e^{2t} \\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 t) e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exercice VI.9 Ch6-Exercice 9 : systdiff linéaire diagonalisable constant non homogène

Résoudre le système différentiel linéaire et constant, non homogène

$$x'(t) = Ax(t) + g(t), \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Solution : Il y a deux façons de procéder :

— On effectue un changement de fonction inconnue en posant $z(t) = P^{-1}x(t)$. On a :

$$x'(t) = Ax(t) + g(t) \iff z'(t) = Dz(t) + P^{-1}g(t) \iff \begin{cases} z_1'(t) = 2z_1(t) + 4t \\ z_2'(t) = 3z_2(t) - 3t \end{cases}.$$

On résout chacune des équations différentielles, on ajoute à la solution générale de l'équation sans second membre déjà calculée dans l'exercice précédent, une solution particulière cherchée sous forme polynômiale (du premier degré), on obtient :

$$\begin{cases} z_1(t) = \alpha_1 e^{2t} - 2t - 1 \\ z_2(t) = \alpha_2 e^{3t} + t + \frac{1}{3} \end{cases},$$

donc $x(t) = Pz(t)$ donne :

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{3t} - t - \frac{2}{3} \\ x_2(t) = -\alpha_1 e^{2t} - 2\alpha_2 e^{3t} + \frac{1}{3} \end{cases}.$$

— On utilise les résultats du paragraphe "Systèmes non homogènes à coefficients constants". On connaît déjà la solution générale du système sans second membre (homogène), il reste à calculer une solution particulière. On cherche cette solution $x_p(t)$ sous forme polynômiale :

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} \beta_1 t + \gamma_1 \\ \beta_2 t + \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors les équations vérifiées par $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$:

$$\begin{cases} \beta_1 & -\beta_2 & & & = -1 \\ \beta_1 & & -\gamma_1 & +\gamma_2 & = 0 \\ 2\beta_1 & +4\beta_2 & & & = -2 \\ & \beta_2 & -2\gamma_1 & +4\gamma_2 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta_1 = -1 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_1 = -\frac{2}{3} \\ \gamma_2 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ceci donne bien sûr la même solution.

Exercice VI.10 Ch6-Exercice 10 : équadiff linéaire cste d'ordre 2 : résolution 1

Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène et à coefficients constants et réels

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Donner les solutions dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

Solution : Le trinôme caractéristique $s^2 - 2s + 2$ a pour racines $1 + i$ et $1 - i$. On obtient donc les solutions complexes :

$$y(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} + \alpha_2 e^{(1-i)t} \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Pour obtenir les solutions réelles, on doit choisir α_1, α_2 complexes conjugués. Par exemple

$$\alpha_1 = a_1 + i a_2, \quad \alpha_2 = a_1 - i a_2, \quad \text{avec } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Après calculs, on obtient les solutions réelles :

$$y(t) = (\beta_1 \cos t + \beta_2 \sin t) e^t, \quad \text{avec } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},$$

où on a posé $\beta_1 = 2a_1$ et $\beta_2 = -2a_2$.

Exercice VI.11 Ch6-Exercice 11 : équadiff linéaire cste d'ordre 2 : sev des sol de dim=2

Soient t_0, a, b et c des réels fixés et on suppose $a \neq 0$. On admettra que pour tout couple (y_0, y_1) donné, il existe une et une seule fonction $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases} \quad (1.1)$$

On note $S_0 = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}\}$

On appelle u l'application de S_0 dans $\mathbb{R}^2$ qui à y associe (y_0, y_1) définis par $y_0 = y(t_0), y_1 = y'(t_0)$.

1. Montrer que S_0 est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que u est linéaire.
3. Montrer que u est bijective de S_0 dans $\mathbb{R}^2$.
4. En déduire que la dimension de S_0 est 2.
5. Si λ vérifie $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, montrer que la fonction y définie par $y(t) = e^{\lambda t}$ appartient à S_0 .
6. On suppose qu'il existe 2 racines distinctes λ_1 et λ_2 de l'équation $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
Montrer que $e^{\lambda_1 t}$ et $e^{\lambda_2 t}$ sont 2 fonctions linéairement indépendantes de S_0 .
7. En déduire que $\forall y \in S_0, y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$.

Solution :

1. S_0 contient la fonction nulle donc est non vide; on montre d'autre part que S_0 est stable par combinaison linéaire.
2. On montre facilement que $u(y + z) = u(y) + u(z)$, et $u(\alpha y) = \alpha u(y)$.
3. — u est surjective : c'est l'existence de la solution du problème

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

qui permet de conclure : en effet, à tout couple (y_0, y_1) correspond une fonction y de S_0 .

- u est injective : c'est l'unicité de la solution du même problème qui permet de conclure. En effet, il ne peut exister 2 fonctions distinctes de S_0 qui vérifient $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

- Les dimensions des 2 espaces vectoriels S_0 et $\mathbb{R}^2$ sont donc égales.
- Il suffit de calculer $ay''(t) + by'(t) + cy(t)$.
- Tout d'abord, les fonctions y_1 et y_2 définies par $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ appartiennent bien à S_0 . Montrons que ces fonctions forment une famille libre. Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$. Cela implique que

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Donc en particulier pour $t = 0$, on obtient $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. D'autre part, la dérivée de cette fonction est également nulle, et si on évalue la dérivée en $t = 0$, on obtient $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 = 0$.

On a donc obtenu deux équations linéaires dont les inconnues sont α_1, α_2 , le déterminant de la matrice du système vaut $\lambda_1 - \lambda_2$, il est donc différent de 0. Donc ce système admet une solution unique $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. La famille de fonctions (y_1, y_2) est donc libre.

- On en déduit que (y_1, y_2) est une base de S_0 , donc toute fonction y de S_0 se décompose sur cette base.

Exercice VI.12 Ch6-Exercice 12 : vp de matrice Compagnon 2×2

- Soient β et $\gamma \in \mathbb{R}$. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\beta \end{pmatrix}$?
- Montrer que si λ est une valeur propre de A , alors $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.
- Montrer que si A admet une valeur propre double, elle n'est pas diagonalisable.

Solution :

- $\Pi_A(s) = s^2 + \beta s + \gamma$ (A est une matrice Compagnon, voir l'Exercice 2 du TD4).
-

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\gamma - \beta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A . (On rappelle que λ vérifie $\lambda^2 + \beta \lambda + \gamma = 0$).

- Comme on l'a déjà vu : si A admettait une valeur propre double λ et si A était diagonalisable, alors A serait semblable à λI et on aurait $A = P^{-1}(\lambda I)P = \lambda I$, ce qui n'est pas vrai.

Une autre façon de démontrer le résultat serait :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\gamma & -\beta - \lambda \end{pmatrix},$$

donc $\text{rang}(A - \lambda I) \geq 1$, donc $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) \leq 1$, donc la dimension de V_λ n'est pas égale à la multiplicité de la valeur propre (double) λ , donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice VI.13 Ch6-Exercice 13 : équadiff linéaire cste d'ordre 2 : résolution 2

Mettre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sous forme d'un système différentiel du premier ordre, puis le résoudre dans $\mathbb{C}$. Comparer avec les résultats obtenus dans l'Exercice A.1.10.

Solution : On pose $x_1 = y$ et $x_2 = y'$, on a alors :

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \iff \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases} \iff x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x(t).$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ admet 2 valeurs propres $1+i$ et $1-i$, des vecteurs propres correspondants sont

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

On définit comme d'habitude $P = (Y_1 \ Y_2)$ et $x = Pz$. On résout

$$\begin{cases} z_1'(t) = (1+i)z_1(t) \\ z_2'(t) = (1-i)z_2(t) \end{cases},$$

on obtient

$$\begin{cases} z_1(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} \\ z_2(t) = \alpha_2 e^{(1-i)t} \end{cases}.$$

Enfin

$$x = Pz \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} + \alpha_2 e^{(1-i)t} \\ x_2(t) = \alpha_1 (1+i) e^{(1+i)t} + \alpha_2 (1-i) e^{(1-i)t} \end{cases}.$$

On retrouve bien sûr $y = x_1$ et on vérifie que $y' = x_2$

Exercice VI.14 Ch6-Exercice 14 : systdiff linéaire non constant non homogène

Résoudre le système :

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_1(t), \\ z_2'(t) = t z_2(t) + t. \end{cases}$$

En déduire la solution du système différentiel $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$, avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2(1-t) \\ t-1 & 2-t \end{pmatrix} \text{ et } g(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

Solution : On a vu dans le cours que la matrice $A(t)$ admet $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = t$ comme valeurs propres avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme vecteurs propres associés, indépendants de t .

Donc, si on pose $x(t) = Pz(t)$, on a

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \iff \begin{cases} z_1'(t) = z_1(t), \\ z_2'(t) = t z_2(t) + t. \end{cases} \iff \begin{cases} z_1(t) = \alpha_1 e^t \\ z_2(t) = \alpha_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \end{cases}.$$

D'où

$$x(t) = Pz(t) \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 2 \\ x_2(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \end{cases}.$$