MT22 - Automne 2016 - Médian
Durée : 2 heures. Aucun document, calculatrice ou smartphone ne sont autorisés.
Rendez une copie par exercice.

Exercice 1. (les questions 1. et 2. sont indépendantes)

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x, y) \neq (0, 0)$ par

$$f(x,y) = \frac{x(y+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et vérifiant $f(0, 0) = 0$.

(a) Etudier la continuité de f.

On a $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = |\cos\theta(r\sin\theta + r^2\sin^2\theta)| \leq r + r^2 = \varepsilon(r)$, et comme $\lim_{r\to 0}\varepsilon(r) = 0$, f est continue en $(0, 0)$. Pour $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ la continuité de f découle des résultats classiques (quotient de deux fonctions continues, la fonction au dénominateur ne s'annulant pas).

(b) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$. Que peut-on en déduire sur la continuité des dérivées partielles de f ?

On calcule les dérivées partielles en $(0, 0)$: comme $\forall x \neq 0,\ f(x, 0) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x} = 0,$$

et de même puisque $\forall y \neq 0,\ f(0, y) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y} = 0.$$

Si f était différentiable en $(0, 0)$ on aurait

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y),$$

avec $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x, y) = 0$. Or ici on a

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x(y+y^2)}{x^2+y^2},$$

et comme

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

ε ne tend pas vers 0 en $(0, 0)$, donc f n'est pas différentiable en $(0, 0)$. On en conclut que les dérivées partielles ne peuvent être continues en $(0, 0)$ car si elles l'étaient f serait différentiable en $(0, 0)$ (condition suffisante vue en cours).

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \tag{1}$$

que l'on se propose de résoudre en coordonnées polaires.

(a) On définit $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, calculer $\dfrac{\partial g}{\partial\theta}$.

On a $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(b) En déduire que $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi(x,y)$ où φ est une fonction radiale arbitraire.

On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ dans (1) ce qui donne

$$r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 1 \Longleftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 1,$$

d'où par intégration par rapport à θ,

$$g(r,\theta) = \theta + h(r),$$

et comme $\frac{y}{x} = \tan\theta$, on a

$$f(x,y) = \theta + h(r) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + h(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Exercice 2.

On désire fabriquer une boite (sans couvercle sur le dessus) de volume 1 m^3 ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions (en mètres) : largeur a, hauteur b, profondeur c. Pour optimiser la quantité de matière utilisée, on désire que la somme des aires des 5 faces soit aussi petite que possible. Quelles dimensions a, b, c doit-on choisir pour fabriquer la boite (on vérifiera que la solution obtenue est bien un minimum) ?

La somme des aires des 5 faces est égale à $S = ac + 2ab + 2bc$ et comme la boite est de volume 1 m^3 on a nécessairement $abc = 1$, on peut donc déjà définir $b = \frac{1}{ac}$, et la fonction $f : (\mathbb{R}^{+*})^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(a,c) = ac + 2ab + 2bc = ac + \frac{2}{c} + \frac{2}{a}.$$

La surface sera minimale si $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial c} = 0$, soit

$$c - \frac{2}{a^2} = 0, \quad a - \frac{2}{c^2} = 0$$

ce qui donne $a^4 - 2a = 0$, d'où $a^* = 2^{\frac{1}{3}}$, puis par substitution $c^* = 2^{\frac{1}{3}}$ et $b = 4^{-\frac{1}{3}}$. Calculons les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a^*,c^*) = \frac{4}{(a^*)^3} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial a}(a^*,c^*) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial c^2}(a^*,c^*) = \frac{4}{(c^*)^3} = 2.$$

Comme le discriminant $\Delta = (\frac{\partial^2 f}{\partial c\partial a}(a^*,c^*))^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a^*,c^*)\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}(a^*,c^*) = -3$ est négatif et $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} > 0$ on a bien un minimum.

Exercice 3.

Soient $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et le champ de vecteurs $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini en tout point $M(x,y,z)$ par

$$\vec{V}(x,y,z) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

1. Le champ $\vec{V}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ? Si oui déterminer ce potentiel.

On a $\vec{V} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = 2\vec{\omega}$. Donc si $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ alors $\vec{V}$ ne dérive pas d'un potentiel et si $\vec{\omega} = \vec{0}$ alors $\vec{V}$ dérive d'un potentiel constant $f(x,y,z) = c$ où c est une constante arbitraire.

2. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$, puis déterminer ce potentiel sous la forme
$$\vec{A} = (P(y,z), Q(x,z), R(x,y)).$$

On a $\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(\omega_2 z - \omega_3 y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega_3 x - \omega_1 z) + \frac{\partial}{\partial z}(\omega_1 y - \omega_2 x) = 0$ donc $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ et on a
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix}.$$
Il y a plusieurs solutions possibles puisque l'on peut ajouter à $\vec{A}$ n'importe quel champ dérivant d'un potentiel scalaire. On peut procéder par identification et obtenir une des solutions possibles : comme R ne dépend pas de z on a $R(x,y) = -\omega_3 \frac{y^2}{2} + a(x)$ et comme Q ne dépend pas de y, $Q(x,z) = -\omega_2 \frac{z^2}{2} + b(x)$. Avec les équations suivantes on finit par obtenir
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -\omega_1 \frac{y^2+z^2}{2} + \alpha \\ -\omega_2 \frac{x^2+z^2}{2} + \beta \\ -\omega_3 \frac{x^2+y^2}{2} + \gamma \end{pmatrix}$$
où α, β, γ sont trois constantes arbitraires. Mais il est possible d'obtenir avec quelques efforts supplémentaires d'autres solutions avec des arguments de "séparation des variables", comme par exemple :
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -\omega_1 \frac{y^2+z^2}{2} + \beta z + \alpha y \\ -\omega_2 \frac{x^2+z^2}{2} + \alpha x + \delta z \\ -\omega_3 \frac{x^2+y^2}{2} + \beta x + \delta y \end{pmatrix},$$
on notera que dans ce cas les deux potentiels proposés diffèrent juste d'un champ dérivant d'un potentiel scalaire puisque
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \begin{pmatrix} \beta z + \alpha y \\ \alpha x + \delta z \\ \beta x + \delta y \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

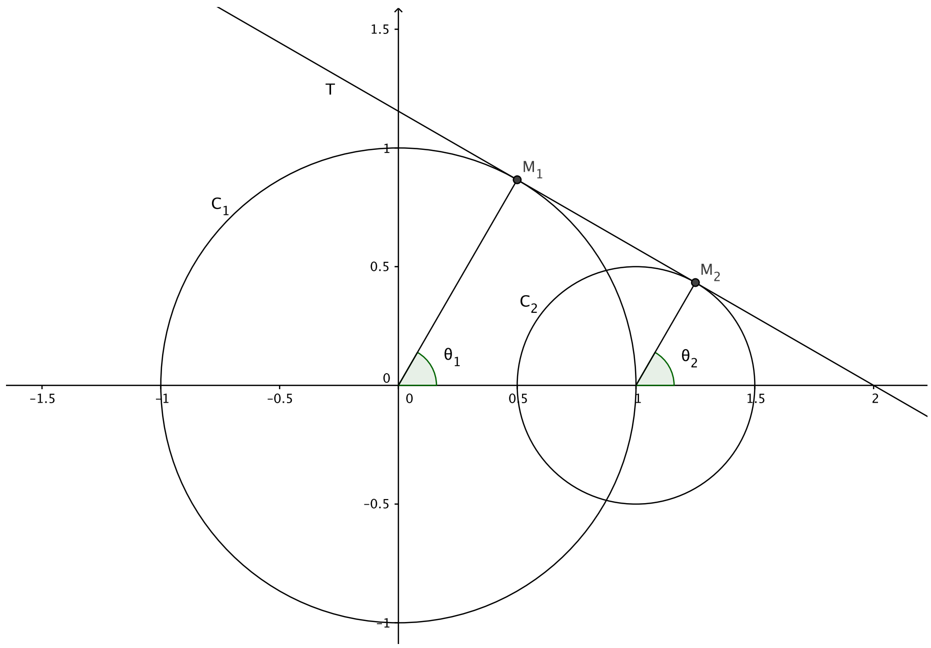
Exercice 4.

1. Montrer que l'image de l'application
$$\gamma : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$$
$$\theta \mapsto (x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta)$$
est un cercle de centre $M_0(x_0, y_0)$ et de rayon R.

Posons $M = \gamma(\theta)$, on a
$$\|M_0 M\|^2 = (\gamma_1(\theta) - x_0)^2 + (\gamma_2(\theta) - y_0)^2 = R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R^2,$$
donc $\operatorname{Im}\gamma \subset C(M_0, R)$. D'autre part soit $M(x,y) \in C(M_0, R)$, on a donc
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow ((x - x_0)/R)^2 + ((y - y_0)/R)^2 = 1,$$
comme on a une somme de deux carrés indépendants et égale à 1, il existe θ tel que
$$\cos\theta = (x - x_0)/R, \quad \sin\theta = (y - y_0)/R,$$
d'où il existe θ tel que $x = x_0 + R\cos\theta$ et $y = y_0 + R\sin\theta$. Donc $C(M_0, R) \subset \operatorname{Im}\gamma$. Donc au final $\operatorname{Im}\gamma = C(M_0, R)$ par double inclusion.

2. On considère les cercles C_1 de centre $(0,0)$ et de rayon 1 et C_2 de centre $(1,0)$ et de rayon $1/2$.

   (a) Préciser γ_1 et γ_2 telles que $C_1 = \operatorname{Im}\gamma_1$ et $C_2 = \operatorname{Im}\gamma_2$ et faire une figure représentant C_1 et C_2 ainsi que leur tangente commune T de pente négative.



$$\begin{array}{rcl}\gamma_1 : [0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos\theta, \sin\theta)\end{array} \qquad \begin{array}{rcl}\gamma_2 : [0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (1+\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta)\end{array}$$

   (b) On note $M_1 = \gamma_1(\theta_1)$ et $M_2 = \gamma_2(\theta_2)$, les points de contact de T avec C_1, C_2 respectivement. En utilisant γ_1' et γ_2' montrer que $\theta_1 = \theta_2$ et retrouver ainsi une propriété géométrique connue.

   En ces deux points, les tangentes sont confondues donc leurs vecteurs directeurs $\gamma_1'(\theta_1)$ et $\gamma_2'(\theta_2)$ sont colinéaires donc le déterminant de ces deux vecteurs est nul :

$$\begin{vmatrix} -\sin\theta_1 & -\frac{1}{2}\sin\theta_2 \\ \cos\theta_1 & \frac{1}{2}\cos\theta_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2) = 0,$$

   d'où $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$ soit $\theta_1 = \theta_2$.

   (c) Ecrire que M_2 appartient à la tangente à C_1 en M_1, en déduire que $\theta_1 = \theta_2 = \dfrac{\pi}{3}$.

   $\overrightarrow{M_1M_2}$ est colinéaire à $\gamma_1'(\theta_1)$ donc le déterminant de ces deux vecteurs est nul (on a posé $\theta_1 = \theta_2 = \theta$) :

$$0 = \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{2}\cos\theta - \cos\theta & -\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta - \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta - \frac{1}{2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \cos\theta - \frac{1}{2},$$

   d'où $\theta = \frac{\pi}{3}$.

~~~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~~~