MT22 - Automne 2016 - Médian
Durée : 2 heures. Aucun document, calculatrice ou smartphone ne sont autorisés.
Rendez une copie par exercice.

Exercice 1. (les questions 1. et 2. sont indépendantes)

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x, y) \neq (0, 0)$ par
$$f(x,y) = \frac{x(y+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
et vérifiant $f(0, 0) = 0$.
   (a) Etudier la continuité de f.
   (b) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$. Que peut-on en déduire sur la continuité des dérivées partielles de f ?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ solution de l'équation aux dérivées partielles
$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \tag{1}$$
que l'on se propose de résoudre en coordonnées polaires.
   (a) On définit $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, calculer $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$.
   (b) En déduire que $f(x, y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \varphi(x, y)$ où φ est une fonction radiale arbitraire.

Exercice 2.

On désire fabriquer une boite (sans couvercle sur le dessus) de volume 1 m^3 ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions (en mètres) : largeur a, hauteur b, profondeur c. Pour optimiser la quantité de matière utilisée, on désire que la somme des aires des 5 faces soit aussi petite que possible. Quelles dimensions a, b, c doit-on choisir pour fabriquer la boite (on vérifiera que la solution obtenue est bien un minimum) ?

Exercice 3.

Soient $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et le champ de vecteurs $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini en tout point $M(x, y, z)$ par
$$\vec{V}(x,y,z) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

1. Le champ $\vec{V}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ? Si oui déterminer ce potentiel.
2. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$, puis déterminer ce potentiel sous la forme
$$\vec{A} = (P(y,z), Q(x,z), R(x,y)).$$

Exercice 4.

1. Montrer que l'image de l'application
$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi[&\to \mathbb{R}^2\\ \theta &\mapsto (x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta)\end{aligned}$$
est un cercle de centre $M_0(x_0, y_0)$ et de rayon R.
2. On considère les cercles C_1 de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 et C_2 de centre $(1, 0)$ et de rayon $1/2$.
   (a) Préciser γ_1 et γ_2 telles que $C_1 = \operatorname{Im}\gamma_1$ et $C_2 = \operatorname{Im}\gamma_2$ et faire une figure représentant C_1 et C_2 ainsi que leur tangente commune T de pente négative.
   (b) On note $M_1 = \gamma_1(\theta_1)$ et $M_2 = \gamma_2(\theta_2)$, les points de contact de T avec C_1, C_2 respectivement. En utilisant γ_1' et γ_2' montrer que $\theta_1 = \theta_2$ et retrouver ainsi une propriété géométrique connue.
   (c) Ecrire que M_2 appartient à la tangente à C_1 en M_1, en déduire que $\theta_1 = \theta_2 = \dfrac{\pi}{3}$.

~~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~~