Corrigé du Final MT22 - A2020

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

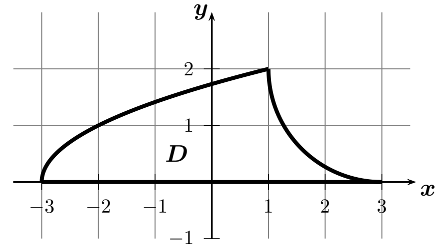
Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points)

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x-3)^2 + (y-2)^2 \geq 4, \ y \geq 0 \text{ et } y^2 \leq 3 + x\},$$

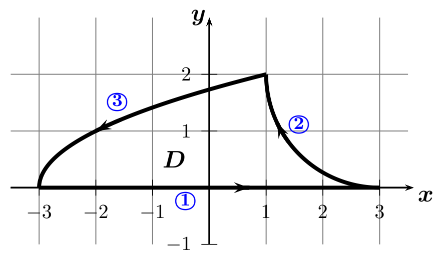
et représenté graphiquement ci-dessous



1. Soit Γ le bord du domaine D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe Γ.

Correction :



$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in ① \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t : -3 \to 3 \ ,$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in ② \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2\cos\theta \\ 2 + 2\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta : \tfrac{3\pi}{2} \to \pi \ ,$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in ③ \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 3 \\ t \end{pmatrix}, \quad t : 2 \to 0 \ ,$$

(b) À l'aide d'une intégrale curviligne, montrer que l'aire de D est égal à

$$Aire(D) = \tfrac{28}{3} - \pi.$$

Correction : Il s'agit d'utiliser le théorème de Green-Riemann. La courbe fermée Γ est le bord d'un domaine borné D quarrable. La courbe Γ est sans point double et parcouru dans le sens trigonométrique donc :

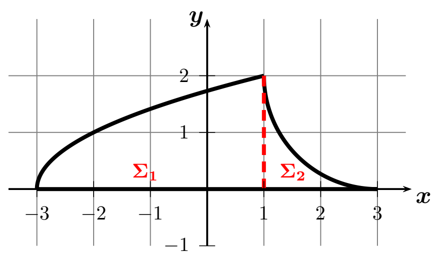
$$\mathcal{A}ire(D) = \iint_D 1\, dxdy = \int_\Gamma xdy.$$

Calculons

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma xdy &= \int_{-3}^{3} t \times 0dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} (3 + 2\cos\theta) \times 2\cos\theta\, d\theta + \int_2^0 (t^2 - 3) \times 1dt \\
&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} (6\cos\theta + 4\cos^2\theta)\, d\theta + \int_2^0 (t^2 - 3)dt \\
&= \Big[6\sin\theta + 2\theta + \sin 2\theta\Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} + \Big[\tfrac{t^3}{3} - 3t\Big]_2^0 \\
&= 2\pi - (-6 + 3\pi) - (\tfrac{8}{3} - 6) \\
&= \tfrac{28}{3} - \pi.
\end{aligned}$$

2. (a) Étant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer de deux façons différentes l'intégrale double $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ en suite d'intégrales simples en x et en y.
(S'il y a lieu, indiquez les découpages effectués sur la figure.)

Correction : • **Méthode 1 avec la 1ère formule de Fubini**.



En utilisant le découpage ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y)\, dxdy &= \iint_{\Sigma_1} f(x, y)\, dxdy + \iint_{\Sigma_2} f(x, y)\, dxdy \\
&= \int_{-3}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{3+x}} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_1^3 \left(\int_0^{2-\sqrt{4-(x-3)^2}} f(x, y)\, dy \right) dx.
\end{aligned}$$

• **Méthode 2 avec la 2ème formule de Fubini**. Un découpage n'est pas nécessaire.

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_{y^2-3}^{3-\sqrt{4-(y-2)^2}} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

(b) Avec l'une des formules précédentes, montrer que $\iint_D (y - 2)\, dxdy = -8$.

Correction : Avec la seconde formule, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\iint_D (y-2)\,dxdy &= \int_0^2 \left(\int_{y^2-3}^{3-\sqrt{4-(y-2)^2}} (y-2)\,dx \right) dy \\
&= \int_0^2 (y-2)\big(3-\sqrt{4-(y-2)^2}-(y^2-3)\big)dy \\
&= \int_0^2 \big(6y-12-y^3+2y^2-(y-2)\sqrt{4-(y-2)^2}\big)dy \\
&= \Big[3y^2-12y-\tfrac{y^4}{4}+\tfrac{2y^3}{3}+\tfrac{1}{3}(4-(y-2)^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2 \\
&= 12-24-4+\tfrac{16}{3}+\tfrac{8}{3} = -8
\end{aligned}$$

(c) Déterminer le volume du solide de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 0 \leq z \leq y+1, \text{ et } (x,y) \in D\}.$$

(Indication : utiliser les résultats des questions **1.***(b) et* **2.***(b).)*

Correction : Le volume est donné par la formule

$$\mathcal{Vol}(\mathcal{V}) = \iint_D (y+1)\,dxdy.$$

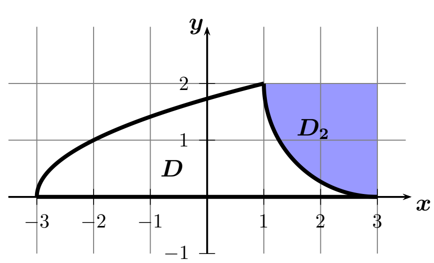
Avec la linéarité de l'intégration on a

$$\mathcal{Vol}(\mathcal{V}) = \iint_D (y-2)\,dxdy + 3 \times \mathcal{Aire}(D) = -8 + 3 \times (\tfrac{28}{3} - \pi) = 20 - 3\pi.$$

3. Soit $D_2 = D_1 \backslash D$ où $D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 0 \leq y \leq 2 \text{ et } y^2-3 \leq x \leq 3\}$.

(a) Hachurer ou colorer le domaine D_2 sur la figure ci-dessus.

Correction :



(b) À l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, transformer l'intégrale double $\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$ en suite d'intégrales simples.

Correction : On a

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x = 3 + r\cos\theta, \; y = 2 + r\sin\theta, \; r \in [0,2] \text{ et } \theta \in [\pi, \tfrac{3\pi}{2}]\}.$$

Le jacobien est $|J_\phi| = r$. On a donc

$$\int_{D^2} f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} r \times f(3 + r\cos\theta, 2 + r\sin\theta)\,d\theta \right) dr.$$

(c) Retrouver le volume du domaine $\mathcal{V}$.

Correction : Sachant que $D = D_1 \backslash D_2$, le volume de $\mathcal{V}$ est donc égal à

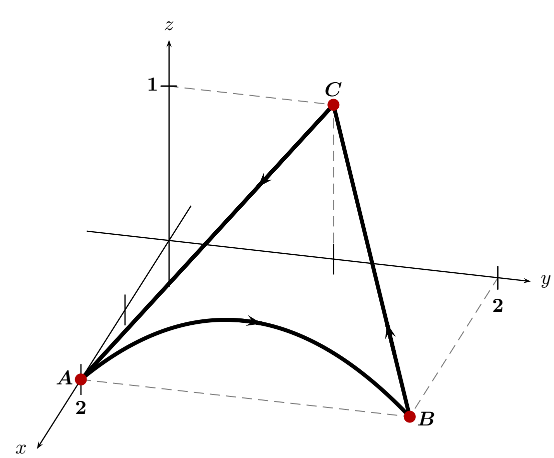
$$\begin{aligned}
\mathcal{V}ol(\mathcal{V}) &= \iint_{D_1} (y+1)dxdy - \iint_{D_2} (y+1)dxdy \\
&= \int_0^2 \left(\int_{y^2-3}^3 (y+1)dx \right) dy - \int_0^2 \left(\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} r \times (3 + r\sin\theta)d\theta \right) dr \\
&= \int_0^2 (y+1)(6-y^2)dy - \int_0^2 \left[3r\theta - r^2\cos\theta \right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}} dr \\
&= \int_0^2 \left(6y + 6 - y^3 - y^2\right)dy - \int_0^2 \left(\tfrac{3\pi}{2} r - r^2\right)dr \\
&= \left[3y^2 + 6y - \tfrac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 - \left[\tfrac{3\pi r^2}{4} - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 \\
&= 12 + 12 - 4 - \tfrac{8}{3} - (3\pi - \tfrac{8}{3}) = 20 - 3\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (Barème approximatif : 4 points)

Soient $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$ et $C(0,1,1)$ trois points dans l'espace.
On considère les courbes suivantes :
$\Gamma_1 :=$ le segment $[AC]$,
$\Gamma_2 :=$ le segment $[BC]$,
$\Gamma_3 :=$ la courbe définie par les équations cartésiennes $x = 2$ et $(y-1)^2 + 4z^2 = 1$ et $z \geq 0$.

1. Faire une figure en perspective en y représentant les 3 chemins ci-dessus.

Correction :



2. Paramétrer la courbe $\mathscr{C} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et indiquer sur la figure le sens de parcours choisi.

Correction : En suivant le sens de parcours de la figure ci-dessus : on a

$$\begin{aligned}
M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Gamma_1 \quad &\Leftrightarrow \quad M = (1-t)C + tA, \quad t : 0 \to 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t\\(1-t)\\(1-t)\end{pmatrix}, \quad t : 0 \to 1\ , \\
M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Gamma_2 \quad &\Leftrightarrow \quad M = (1-t)B + tC, \quad t : 0 \to 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2(1-t)\\2-t\\t\end{pmatrix}, \quad t : 0 \to 1\ , \\
M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Gamma_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1+\cos\theta\\\frac{1}{2}\sin\theta\end{pmatrix}, \quad \theta : \pi \to 0\ ,
\end{aligned}$$

3. Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteur défini par $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix}xy\\1\\-z^2\end{pmatrix}$.

A l'aide de la paramétrisation de $\mathscr{C}$, calculer l'intégrale curviligne $\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) = \displaystyle\int_{\mathscr{C}} \vec{V}\cdot\vec{d\ell}$.

(Indication : il faut trouver $\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) = \pm\frac{8}{3}$.)

Correction :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}} \vec{V}\cdot\vec{d\ell} &= \int_{\mathscr{C}} xy\,dx + dy - z^2 dz \\
&= \int_{\Gamma_1} xy\,dx + dy - z^2 dz + \int_{\Gamma_2} xy\,dx + dy - z^2 dz + \int_{\Gamma_3} xy\,dx + dy - z^2 dz \\
&= \int_0^1 2t(1-t)\times 2dt - 1dt - (1-t)^2\times(-1)dt \\
&\quad + \int_0^1 2(1-t)(2-t)\times(-2)dt - 1dt - t^2 dt \\
&\quad + \int_\pi^0 -\sin\theta\,d\theta - \frac{\sin^2\theta}{4}\times\frac{\cos\theta}{2}d\theta \\
&= \int_0^1 (2t-3t^2)dt + \int_0^1 (-9+12t-5t^2)dt + \int_\pi^0 \Big(-\sin\theta - \tfrac{\cos\theta\sin^2\theta}{8}\Big)\,d\theta \\
&= \Big[t^2 - t^3\Big]_0^1 + \Big[-9t + 6t^2 - \tfrac{5}{3}t^3\Big]_0^1 + \Big[\cos\theta - \frac{\sin^3\theta}{24}\Big]_\pi^0 \\
&= 0 + \Big(-9 + 6 - \tfrac{5}{3}\Big) + \Big(1 - (-1)\Big) = -\tfrac{8}{3}
\end{aligned}$$

4. Sans calcul, en déduire si le champ de vecteur $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ou non.

Correction : Le chemin $\mathscr{C}$ étant fermé, s'il existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $\vec{V} = \nabla f$ alors on doit avoir $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \vec{V}\cdot\vec{d\ell} = 0$. Or,

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{V}\cdot\vec{d\ell} = -\tfrac{8}{3} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V} \text{ ne dérive par d'un potentiel scalaire.}$$

Exercice 3 (Barème approximatif : 6 points)

On considère le volume $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \sqrt{2x^2+2y^2} \leq z \leq \sqrt{1+x^2+y^2}\}.$$

1. (a) Déterminer la projection D du volume $\mathcal{V}$ dans le plan $z=0$.

Correction : On cherche le domaine de définition des variables (x,y). On a

$$\sqrt{2x^2+2y^2} \leq \sqrt{1+x^2+y^2} \Leftrightarrow 2x^2+2y^2 \leq 1+x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 1.$$

La projection D est le disque unité contenu dans le plan $z=0$. Une définition précise s'obtient en coordonnées polaires :

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta, \ r \in [0,1] \text{ et } \theta \in [0,2\pi[\right\}.$$

(b) À l'aide de la méthode des bâtons parallèles à (Oz), transformer l'intégrale triple $\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz$ en suite d'intégrales simples.

Correction : On a

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz &= \iint_D \left(\int_{\sqrt{2x^2+2y^2}}^{\sqrt{1+x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz\right) dxdy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{r\sqrt{2}}^{\sqrt{1+r^2}} r \times f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dz\right) d\theta\right) dr.\end{aligned}$$

(c) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

Correction : On a

$$\begin{aligned}\mathcal{V}ol(\mathcal{V}) = \iiint_{\mathcal{V}} 1\,dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{r\sqrt{2}}^{\sqrt{1+r^2}} r\,dz\right) d\theta\right) dr \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r\sqrt{1+r^2} - r^2\sqrt{2})\,d\theta\right) dr \\ &= 2\pi\left[\frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{2}\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2\pi(\sqrt{2}-1)}{3}.\end{aligned}$$

2. On considère la surface définie par $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z^2 = 2x^2+2y^2 \text{ et } 0 \leq z \leq \sqrt{2}\}$.

(a) Paramétrer la surface S en coordonnées cylindriques.

Correction :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists(\rho,\phi) \in [0,1] \times [0,2\pi[, \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\rho,\phi) = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ \rho\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

(b) Exprimer l'intégrale surfacique $\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma$ à l'aide d'une intégrale double en coordonnées polaires.

Correction : On a

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} f\circ\Phi(\rho,\phi)\,||\vec{t_\rho}\wedge\vec{t_\phi}||\,d\phi d\rho$$

où

$$\vec{t_\rho}\wedge\vec{t_\phi} = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\wedge\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\rho\sin\phi\\ \rho\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}\rho\cos\phi\\ -\sqrt{2}\rho\sin\phi\\ \rho\end{pmatrix} \Rightarrow ||\vec{t_\rho}\wedge\vec{t_\phi}|| = \rho\sqrt{3}$$

(c) Calculer l'intégrale de surface $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$.

Correction :

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \rho\times\rho\sqrt{3}d\rho d\phi = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$