Médian MT22 - A2021

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)
Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle la formule de Taylor-Young de la fonction Arctan à l'ordre 3 en $a = 0$: il existe une fonction ε telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\operatorname{Arctan} t = t - \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t) \quad \text{avec } \varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\to} 0 \text{ et } 0 \leq \varepsilon(t) \leq \frac{t^2}{5}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.
2. Déterminer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 2 (Barème approximatif : 6 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = x\ln(x^2+y^2) - 2x.$$

1. Déterminer le gradient de la fonction f .
2. Montrer que les points critiques de f sont de la forme $(x_0, 0)$ ou $(0, y_0)$. Puis préciser toutes les valeurs de x_0 et y_0 possibles.
3. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
4. En déduire la nature des points critiques (minimum, maximum ou point selle).

Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points)
Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\vec{V}(M) = \big(2y + 3z\,,\, 5z - 2x\,,\, x\big).$$

1. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur.
2. Soit $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteur défini par $\vec{A}(M) = \big(x\psi(y,z), y(x^2-2z), z\phi(x,y)\big)$, où ϕ et ψ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\mathbf{rot}\,\vec{A}$.
3. Déterminer la forme générale des fonctions ϕ et ψ de sorte que $\vec{V} = \mathbf{rot}\,\vec{A}$.

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)
On considère le domaine défini par

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 4 \ \text{ et } \ 0 \leq x \leq 3 - (y-1)^2\}.$$

1. Faire une figure.
2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.
3. Soit $M_0(\sqrt{3}-1, 0) \in \mathscr{C}$.
   (a) Placer le point M_0 sur votre figure.
   (b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.
   (c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.