Médian MT22 - A2022

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

**Exercice 1** (Barème approximatif : 5 points)
Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x,y)=\ln(1+\sqrt{x^2+y^2}) \qquad \text{et} \qquad f_2(x,y)=x\ln(1+\sqrt{x^2+y^2}).$$

1. Montrer que la fonction $f_1$ est continue en $(0,0)$.
2. (a) La fonction $f_1$ admet-elle des dérivées partielles premières en $(0,0)$ ?
   (b) Justifier que $f_1$ n'est pas différentiable en $(0,0)$.
3. Déterminer les dérivées partielles premières de $f_2$ en $(x,y)\neq(0,0)$.
4. Justifier que $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)=0$ et $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,0)=0$.
5. Montrer que la fonction $f_2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 2** (Barème approximatif : 6 points)
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ un paramètre et $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=e^{x-y}(x^2-\lambda y^2).$$

1. Déterminer le gradient de la fonction $f$ .
2. Montrer que si $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ alors la fonction $f$ admet deux points critiques à préciser.
   *Dans la suite on pose* $\boldsymbol{\lambda=3}$.
3. Déterminer les dérivées partielles secondes de $f$.
4. En déduire la nature des points critiques (minimum, maximum ou point selle).

**Exercice 3** (Barème approximatif : 4 points)
Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ deux paramètres. Soit $\varphi:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au moins et **paire**.
On définit le champ de vecteurs $\vec{V}$ sur $D:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,y\neq z\}$ par

$$\vec{V}(M)=\begin{pmatrix}\alpha xy+z^3\\ x^2-z\varphi(y-z)\\ \beta xz^2+y\varphi(y-z)\end{pmatrix} \quad \text{et } \vec{V}(0,1,0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\alpha_0\,,\quad \beta=\beta_0 \quad \text{et } \forall\, t>0,\ t\varphi'(t)+2\varphi(t)=0,$$
   où $\alpha_0$ et $\beta_0$ sont deux réels à préciser.
2. Déterminer la forme générale des fonctions $\varphi$ de sorte que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.
3. Déterminer la forme générale des fonctions $f:D\to\mathbb{R}$ telles que $\vec{V}=\nabla f$.

**Exercice 4** (Barème approximatif : 5 points)
On considère le domaine défini par

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{2} \leq 1 \ \text{ et } \ x^2 - y^2 \leq 1\}.$$

1. Faire une figure.
2. Paramétrer le bord $\mathscr{C}$ du domaine $\mathscr{D}$.
3. Soit $M_0(-1, \frac{\sqrt{6}}{2}) \in \mathscr{C}$.
   (a) Placer le point $M_0$ sur votre figure.
   (b) Déterminer les équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M_0$.
   (c) En déduire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M_0$.

**Formulaire :** on rappelle que la forme générale des solutions d'une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t)$$

est

$$y(t) = Ce^{A(t)},$$

où $A$ est une primitive de $a$ à déterminer et $C \in \mathbb{R}$ est une contante réelle quelconque.