Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Avril 2021 - Médian
Durée : 1h30.
Indiquer clairement le numéro de votre groupe
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1.

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{x-y}{x^2+y^2}) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
   (b) La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
   (c) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
   (d) Les dérivées partielles de f sont-elles continues en $(0,0)$?

2. On souhaite étudier les extremums de la fonction définie auparavant.
   (a) Montrer qu'il n'y a qu'un seul point critique de la forme (x_0, x_0), en distinguant les cas $x_0 = 0$ et $x_0 \neq 0$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}.$$

   Calculer la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$ et $f(x_n, -x_n)$.
   (c) En utilisant la question précédente, donner la nature du point critique de la forme (x_0, x_0).

Exercice 2. Soit h une fonction dérivable définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère le champ de vecteurs :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} -xh(z) \\ \\ -yh(z) \\ \\ x^2+y^2+h(z) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad h(0) = 1.$$

1. Trouver la fonction h telle que **rot**$(\vec{V}) = \vec{0}$.
2. Trouver la fonction h telle que **div**$(\vec{V}) = 0$.
3. On suppose que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire f. Déterminer f.
4. On suppose que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur, que l'on note $\vec{U}$. On cherche un tel champ sous la forme

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} -g(y)f(z) - \phi(y) \\ \\ g(x)f(z) + \phi(x) \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \phi(0) = 1, f(0) = 1, g(2) = 1.$$

   Déterminer la forme générale des fonctions g, f et ϕ. En déduire la forme de $\vec{U}$.

Exercice 3. On considère la fonction suivante

$$f(x,y,z) = \sin(\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

1. Calculer le laplacien de f, "Δf".
2. Retrouver le résultat précédent en utilisant les coordonnées sphériques.

Rappel : *Soit r, θ et ϕ les coordonnées sphériques d'un point $M = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$. Alors l'experssion du laplacien en coordonnées sphériques est donnée par la forumle suivante*

$$\Delta f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)) =$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,\phi) + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\phi) + \frac{1}{r^2\cos^2(\phi)}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta,\phi) - \frac{\tan(\phi)}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \phi}(r,\theta,\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(r,\theta,\phi)$$

où $f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)) = g(r,\theta,\phi)$.