Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Mai 2017 - Partiel-Corrigé

Exercice 1. Soit c une constante réelle. On considère l'équation suivante, dite équation de transport :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = c\frac{\partial f}{\partial x}(t,x). \tag{1}$$

On suppose désormais que $f(t,x) = a(x + h(t))$ où a et h sont des fonctions dérivables. De plus, on suppose que $h(0) = 0$.

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en fonction des dérivées premières de a et h.

   Corrigé : On a
   $$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = h'(t)a'(x + h(t))$$
   et
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = a'(x + h(t)).$$

2. Trouver la fonction h pour que f soit une solution de l'équation de transport (1), pour toute fonction a.

   Corrigé : Si f est une solution de (1), alors on obtient que $h'(t) = c$. Cela implique que $h(t) = ct + K$. Vu que $h(0) = 0$ on déduit que $h(t) = c\,t$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}, \quad \text{pour tout} \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
   Indication : On pourra utiliser $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

   Corrigé : On résout le sytème $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. À savoir
   $$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0.$$
   On soustrait les deux équations on obtient
   $$\frac{(1-y)^2 - (1-x)^2}{(1-x)^2(1-y)^2} = \frac{(2-x-y)(x-y)}{(1-x)^2(1-y)^2} = 0.$$
   Puisque $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, on sait que $0 < x + y < 2$, donc $x = y$. Cela qui implique que $(1-x)^2 = 4x^2$ et par conséquent $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -1$. Vu que $0 < x < 1$, on déduit que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est le seul point critique.

2. Étudier la nature de ces points ?

   Corrigé : On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 de f :
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2}{(x+y)^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{(1-y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}.$$
   D'où
   $$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{2}, \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{4} \quad \text{et} \quad c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{2}$$
   On remarque que $\Delta = 4(b^2 - ac) = \frac{27^2}{4} - 27^2 < 0$ et car $a > 0$, on déduit que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est un point de minimum.

Exercice 3.

1. Le théorème de Taylor-Young assure qu'une fonction g deux fois dérivables vérifie la fomule suivante :

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0.$$

Soit $g(x) = e^x$. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $g(x)$, au voisinage de 0.

Corrigé : On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

2. On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon .} \end{cases}$$

(a) La fonction f est-elle continue au point $(0,0)$?

Corrigé : On considère les coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, avec $r > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. On peut vérifier que

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{e^{r^2} - 1}{r^2}.$$

Ce qui prove, d'après le développement limité de e^x, que

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2} - 1}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{r^2} = 1 = f(0,0).$$

Alors f est continue en $(0,0)$.

(b) Les dérivées partielles premières de f existent-elles au point $(0,0)$?

Corrigé : Par la définition des dérivées partielles et en utilisant toujours le développement limité de e^x, on peut voir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2} - 1 - h^2}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{2h^3} = 0.$$

De même, on peut prouver que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) La fonction f est-elle différentiable au point $(0,0)$?

Corrigé : Il suffit de calculer la limite suivante

$$\lim_{(h,k)\to 0} \epsilon(h,k) = \lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to 0} \frac{e^{h^2+k^2} - 1 - h^2 - k^2}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On passe en coordonnées polaires, on obtient que

$$\lim_{(h,k)\to 0} \epsilon(h,k) = \lim_{r\to 0} \epsilon(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2} - 1 - r^2}{r^3} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4}{2r^3} = 0.$$

Donc f est différentiable en $(0,0)$.

(d) Les dérivées partielles de f sont-elles continues au point $(0,0)$?

Corrigé : On peut voir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x(x^2+y^2)e^{x^2+y^2} - 2x(e^{x^2+y^2}-1)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

De plus, si on considère les coordonnées polaires, on peut vérifier que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{2r^2\cos(\theta)e^{r^2} - 2\cos(\theta)(e^{r^2}-1)}{r^3}.$$

Alors

$$\lim_{r\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta)(2+2r^2+r^4) - \cos(\theta)(2r^2+r^4)}{r^3} = \lim_{r\to 0}(r+r^3)\cos(\theta) = 0,$$

car $|\cos(\theta)| \leq 1$. Cela montre que la dérivée partielle de f par rapport à x, est continue en $(0,0)$. De même façon on peut montrer que la dérivée partielle de f par rapport à y, est aussi continue en $(0,0)$.

Exercice 4. Soient α et β deux constantes réelles. On considère le champ de vecteurs

$$\vec{V} = (y + \beta x, x - 2y + 2\alpha z, 2\beta y + \alpha z).$$

1. Sous quelles conditions portant sur α et β le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.

   Corrigé : $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si $\mathbf{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$. De plus, on a $\mathbf{rot}(\vec{V}) = (2(\beta-\alpha), 0, 0)$ et par conséquent $\mathbf{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$ ssi $\beta = \alpha$.
2. On suppose que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire f telle que $f(0,0,0) = -1$ et $f(1,1,1) = 1$. Calculer, dans ce cas, f, α et β.

   Corrigé : Dans ce cas, on sait que $\mathbf{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$, donc $\beta = \alpha$. On cherche maintenant une fonction f telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y + \alpha x \qquad (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x - 2y + 2\alpha z \qquad (2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2\alpha y + \alpha z \qquad (3)$$

   On intègre l'équation (1) par rapport à x, on obtient

$$f(x,y,z) = xy + \frac{\alpha}{2}x^2 + g(y,z).$$

   On dérive cette équation par rapport à y, on déduit, par l'équation (2), que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = -2y + 2\alpha z.$$

   Cela montre que $g(y,z) = -y^2 + 2\alpha zy + h(z)$ et par conséquent

$$f(x,y,z) = xy + \frac{\alpha}{2}x^2 - y^2 + 2\alpha zy + h(z).$$

   Finalement, on dérive cette équation par rapport à z, on déduit, par l'équation (3), que $h'(z) = \alpha z$. Alors $h(z) = \frac{\alpha}{2}z^2 + c$, d'où

$$f(x,y,z) = xy + \frac{\alpha}{2}x^2 - y^2 + 2\alpha zy + \frac{\alpha}{2}z^2 + c.$$

   De plus, puisque $f(0,0,0) = -1$ et $f(1,1,1) = 1$, on obtient que $c = -1$ et $\alpha = \frac{2}{3}$.

3. Pour quelles valeurs de α et β le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur ?

   Corrigé : D'après la première question, on sait que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ssi $\alpha = \beta$. De plus, si $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur on a $\mathbf{div}(\vec{V}) = 0$, donc $\beta + \alpha = 2$. Cela montre que $\alpha = \beta = 1$.

4. On se place dans le cas précédent et on suppose que $\vec{V} = \mathbf{rot}(\vec{U})$ avec

$$\vec{U} = (-g(y) + z\phi(x,y), -z\psi(x,y), -2zx) \quad \text{où} \quad g(0) = 0.$$

   Déterminer la forme générale des fonctions g, ψ et ϕ. En déduire la forme de $\vec{U}$.

   Corrigé : Dans ce cas, on sait que $\alpha = \beta = 1$. On commence à calculer

$$\mathbf{rot}(\vec{U}) = \left(\psi(x,y), 2z + \phi(x,y), -z\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) - z\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) + g'(y)\right).$$

   D'où

$$\begin{array}{ll} \psi(x,y) = y + x & (1) \\ 2z + \phi(x,y) = x - 2y + 2z & (2) \\ -z\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) - z\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) + g'(y) = 2y + z & (3). \end{array}$$

   D'après (1) et (2), on a $\psi(x,y) = y + x$ et $\phi(x,y) = x - 2y$. On remplace cela dans (3), on obtient que $g'(y) = 2y$, alors $g(y) = y^2$ car $g(0) = 0$.

Exercice 5.

1. On considère les surfaces (S_1) et (S_2) de $\mathbb{R}^3$, d'équations paramétriques suivantes :

$$(S_1) : \begin{cases} x = \sqrt{1-v^2}\cos(u) \\ y = \sqrt{1-v^2}\sin(u) \\ z = v \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi[, 0 \leq v \leq 1, \quad (S_2) : \begin{cases} x = v\cos(u) \\ y = v\sin(u) \\ z = v \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi[, 0 \leq v \leq 1.$$

   (a) Déterminer une équation cartésienne implicite de (S_1) et une équation cartésienne implicite de (S_2).

   Corrigé :

$$(S_1) \quad : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{avec} \quad z \geq 0$$
$$(S_2) \quad : x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{avec} \quad 0 \leq z \leq 1.$$

   (b) Quelles sont les natures des surfaces (S_1) et (S_2) ? On précisera notamment si ce sont des surfaces de révolution et, si c'est le cas, on précisera leur axe de révolution.

   Corrigé : (S_1) est une demi-sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1 et (S_2) est une partie d'un cône d'axe $\vec{oz}$. Les deux surfaces sont des surfaces de révolutions autour de l'axe $\vec{oz}$.

2. Soit C la courbe d'intersection entre les deux surfaces (S_1) et (S_2).

   (a) Déterminer un vecteur $\vec{N_1}$ normal à (S_1) au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, puis un vecteur $\vec{N_2}$ normal à (S_2) au point M_0.

   Corrigé : On utilise les équations cartésiennes de (S_1) et de (S_2), on déduit que

$$\vec{N_1} = 2(x_0, y_0, z_0), \quad \text{et} \quad \vec{N_2} = 2(x_0, y_0, -z_0).$$

(b) En déduire un vecteur tangent à la courbe C au point M_0.

Corrigé : Il suffit de faire le produit vectoriel entre $\vec{N_1}$ et $\vec{N_2}$, on trouve le vecteur tangent suivant

$$\vec{V} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2} = 8z_0(-y_0, x_0, 0).$$

(c) Montrer que C peut s'écrire comme l'intersection d'un cylindre et d'un plan, en précisant leurs équations.

Corrigé : On sait que

$$C = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = z^2, \quad \text{avec} \quad z \geq 0. \end{cases}$$

Alors

$$C = \begin{cases} x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 1, \\ 2z^2 = 1, \quad \text{avec} \quad z \geq 0. \end{cases} = \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} & \text{(cylindre)} \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{(plan).} \end{cases}$$

(d) Obtenir une équation paramétrique de C.

Corrigé : On paramétre C, avec les coordonnées polaires, ce qui donne

$$C = \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

(e) Retrouver, en utilisant la question précedente, un vecteur tangent à la courbe C au point M_0.

Corrigé : Soit $M_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta_0), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta_0), \frac{1}{\sqrt{2}})$, alors le vecteur suivant est un vecteur tangent à C en M_0

$$\vec{U} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta_0), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta_0), 0 \right) = (-y_0, x_0, 0).$$