**Université de Technologie de Compiègne**

**MT22 - Avril 2021 - Médian**
**Durée : 1h30.**
Indiquer clairement le numéro de votre groupe
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

**Exercice 1.** (9 points)

1. Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{x-y}{x^2+y^2}) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) La fonction $f$ est-elle continue en $(0,0)$ ?

**Corrigé (1 pt)** : On considère les coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, avec $r > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. On peut vérifier que

$$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| = r^2 \left|\sin\left(\frac{\cos(\theta)-\sin(\theta)}{r}\right)\right| \leq r^2.$$

Ce qui prouve que

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0 = f(0,0).$$

Alors $f$ est continue en $(0,0)$.

(b) La fonction $f$ admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$ ?

**Corrigé (1 pt)** : Par la définition des dérivées partielles, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

car $|h\sin(\frac{1}{h})| \leq |h|$. De même, on peut prouver que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) La fonction $f$ est-elle différentiable en $(0,0)$ ?

**Corrigé (1 pt)** : Il suffit de calculer la limite suivante

$$\lim_{(h,k)\to 0}\epsilon(h,k) = \lim_{(h,k)\to 0}\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to 0}\sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{h-k}{h^2+k^2}\right).$$

Puisque $|\sqrt{h^2+k^2}\sin(\frac{h-k}{h^2+k^2})| \leq \sqrt{h^2+k^2}$, cette limite est bien nulle, donc $f$ est différentiable en $(0,0)$.

(d) Les dérivées partielles de $f$ sont-elles continues en $(0,0)$ ?

**Corrigé (2 pts)** : On peut voir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{x-y}{x^2+y^2}) + \frac{y^2-x^2+2xy}{x^2+y^2}\cos(\frac{x-y}{x^2+y^2}) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

De plus, si on considère le chemin $y = x$, on peut vérifier que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = 1.$$

Cela montre que la dérivée partielle de $f$ par rapport à $x$, n'est pas continue en $(0,0)$. De même façon on peut montrer que la dérivée partielle de $f$ par rapport à $y$, n'est pas aussi continue en $(0,0)$.

2. On souhaite étudier les extremums de la fonction définie auparavant.

(a) Montrer qu'il n'y a qu'un seul point critique de la forme $(x_0, x_0)$, en distinguant les cas $x_0 = 0$ et $x_0 \neq 0$. .

**Corrigé (2 pts)** : On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{x-y}{x^2+y^2}) + \frac{y^2-x^2+2xy}{x^2+y^2}\cos(\frac{x-y}{x^2+y^2}) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin(\frac{x-y}{x^2+y^2}) + \frac{y^2-x^2-2xy}{x^2+y^2}\cos(\frac{x-y}{x^2+y^2}) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Cela montre que $(0,0)$ est un point critique et c'est le seul point critique sous la forme $(x_0, x_0)$, car pour $x_0 \neq 0$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_0) = -1$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}.$$

Calculer la limite de $x_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et $f(x_n, -x_n)$. .

**Corrigé (1 pt)** :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0, \quad \text{et} \quad f(x_n, -x_n) = 2x_n^2 \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{2(-1)^n}{\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2}.$$

(c) En utilisant la question précédente, donner la nature du point critique de la forme $(x_0, x_0)$.

**Corrigé (1 pt)** : Vu que $(0,0)$ est le seul point critique, il suffit d'étudier le signe de $f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$ au voisinage de $(0,0)$. D'après la question précédente, on sait que la suite $(x_n, -x_n) \to (0,0)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, donc les points $(x_n, -x_n)$ (à partir d'un certain $n$) sont toujours voisins de l'origine. De plus, on sait que $f(x_n, -x_n)$ change de signe, cela montre que $(0,0)$ n'est pas un point d'extremum.

**Exercice 2.** (6 points) Soit $h$ une fonction dérivable définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère le champ de vecteurs :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} -xh(z) \\ \\ -yh(z) \\ \\ x^2 + y^2 + h(z) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad h(0) = 1.$$

1. Trouver la fonction $h$ telle que $\mathbf{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$.

   **Corrigé (1 pt)** : On a

$$\mathbf{rot}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} y(2 + h'(z)) \\ \\ -x(2 + h'(z)) \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Cela montre que $\mathbf{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$ ssi $2 + h'(z) = 0$. Par conséquent, $h(z) = -2z + c_1$, vu que $h(0) = 1$ on déduit que $h(z) = -2z + 1$.

2. Trouver la fonction $h$ telle que $\mathbf{div}(\vec{V}) = 0$.

   **Corrigé (1 pt)** : Si $\mathbf{div}(\vec{V}) = 0$, alors $-2h(z) + h'(z) = 0$. Cela implique que $h(z) = c_2 e^{2z}$ et puisque $h(0) = 1$, on déduit que $h(z) = e^{2z}$.

3. On suppose que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire $f$. Déterminer $f$.
   **Corrigé (2 pts)** : Dans ce cas, on sait que $\mathbf{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$, donc $h(z) = -2z+1$. On cherche maintenant une fonction $f$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xz - x \qquad (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2yz - y \qquad (2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z + 1 \qquad (3)$$

On intègre l'équation (1) par rapport à $x$, on obtient

$$f(x,y,z) = x^2 z - \frac{x^2}{2} + g(y,z).$$

On dérive cette équation par rapport à $y$, on déduit, par l'équation (2), que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 2yz - y.$$

Cela montre que $g(y,z) = y^2 z - \frac{y^2}{2} + h(z)$ et par conséquent

$$f(x,y,z) = x^2 z + y^2 z - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + h(z).$$

Finalement, on dérive cette équation par rapport à $z$, on déduit, par l'équation (3), que

$$h'(z) = -2z + 1.$$

Alors $h(z) = -z^2 + z + c$, d'où

$$f(x,y,z) = x^2 z + y^2 z - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - z^2 + z + c.$$

4. On suppose que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur, que l'on note $\vec{U}$. On cherche un tel champ sous la forme

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} -g(y)f(z) - \phi(y) \\ g(x)f(z) + \phi(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \phi(0) = 1, f(0) = 1, g(2) = 1.$$

Déterminer la forme générale des fonctions $g$, $f$ et $\phi$. En déduire la forme de $\vec{U}$.

**Corrigé (2 pts)** : Dans ce cas, on sait que $\mathbf{div}(\vec{V}) = 0$, donc $h(z) = e^{2z}$. On commence à calculer

$$\mathbf{rot}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} -g(x)f'(z) \\ -g(y)f'(z) \\ (g'(x) + g'(y))f(z) + \phi'(x) + \phi'(y) \end{pmatrix}.$$

On doit donc résoudre le système suivant

$$\begin{array}{ll} g(x)f'(z) = xe^{2z} & (1) \\ g(y)f'(z) = ye^{2z} & (2) \\ (g'(x) + g'(y))f(z) + \phi'(x) + \phi'(y) = x^2 + y^2 + e^{2z} & (3) \end{array}$$

D'après (1) et (2), on a

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{g(y)}{y} = \frac{e^{2z}}{f'(z)}.$$

On en déduit que ces trois quantités ne dépendent ni de $x$, ni de $y$, ni de $z$ et qu'elles sont donc constantes, à savoir

$$g(x) = \lambda_1 x, g(y) = \lambda_1 y \quad \text{et} \quad f'(z) = \frac{1}{\lambda_1} e^{2z}.$$

Vu que $g(2) = 1$ et $f(0) = 1$, on obtient que $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ et par conséquent, $g(x) = \frac{1}{2}x$ et $f(z) = e^{2z}$. Maintenant, par l'équation (3), on peut voir que

$$\phi'(x) - x^2 = y^2 - \phi'(y)$$

On en déduit que ces deux quantités ne dépendent ni de $x$, ni de $y$ et qu'elles sont donc constantes, à savoir

$$\phi'(x) - x^2 = y^2 - \phi'(y) = \alpha$$

Alors, $\alpha = 0$ et de plus puisque $\phi(0) = 1$, on a

$$\phi(x) = \frac{x^3}{3} + 1.$$

On conclut que

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}ye^{2z} - \frac{y^3}{3} - 1 \\ \\ \frac{1}{2}xe^{2z} + \frac{x^3}{3} + 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.** (5 points) On considère la fonction suivante

$$f(x, y, z) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

1. Calculer le laplacien de $f$, "$\Delta f$".
   **Corrigé (3 pts)** : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

En dérivant une deuxième fois, pour calculer les dérivées partielles secondes, à savoir :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

La somme des trois équations implique

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

2. Retrouver le résultat précédent en utilisant les coordonnées sphériques.
   **Corrigé (2 pts)** : Pour utiliser la formule du Laplacien en coordonnées sphériques, on exprime $f$ en
   $x = r\cos(\phi)\cos(\theta)$, $y = r\cos(\phi)\sin(\theta)$ et $z = r\sin(\phi)$ , à savoir

$$\begin{aligned} f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)) &= \sin\sqrt{(r^2\cos^2(\phi)\cos^2(\theta) + r^2\cos^2(\phi)\sin^2(\theta) + r^2\sin^2(\phi))} \\ &= \sin\sqrt{(r^2\cos^2(\phi)(\underbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}_{=1}) + r^2\sin^2(\phi))} \\ &= \sin\sqrt{(r^2\cos^2(\phi) + +r^2\sin^2(\phi))} = \sin(r) = g(r, \theta, \phi). \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, \phi) = \cos(r), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta, \phi) = -\sin(r), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta, \phi) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(r, \theta, \phi) = 0.$$

Nous remplaçons cela dans la formule du Laplacien en coordonnées sphériques, nous déduisons que

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y, z) &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \\ &= \tfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta, \phi) + \tfrac{2}{r}\tfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, \phi) + \tfrac{1}{r^2\cos^2(\phi)}\tfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta, \phi) - \tfrac{\tan(\phi)}{r}\tfrac{\partial g}{\partial \phi}(r, \theta, \phi) + \tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(r, \theta, \phi) \\ &= -\sin(r) + \tfrac{2}{r}\cos(r) \\ &= \tfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \end{aligned}$$

**Rappel** : *Soit $r$, $\theta$ et $\phi$ les coordonnées sphériques d'un point $M = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$. Alors l'experssion du laplacien en coordonnées sphériques est donnée par la forumle suivante*

$$\Delta f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)) =$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,\phi) + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\phi) + \frac{1}{r^2\cos^2(\phi)}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta,\phi) - \frac{\tan(\phi)}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \phi}(r,\theta,\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(r,\theta,\phi)$$

*où* $f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)) = g(r, \theta, \phi)$.