Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Mai 2023 - Médian
Durée : 1h30.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (6 points) On considère la fonction

$$f(x,y) = 6x - 3y - 3x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3.$$

1. Déterminer les points critiques.
   Indication : On cherchera les points critiques sur les deux droites $y = x$ et $y = -x$.
2. Déterminer la nature des points critiques.

Exercice 2. (7 points) Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on considère le point $(x_0, 0)$. En discutant selon les valeurs de x_0 traiter les points suivants :

1. Étudier la continuité de f en $(x_0, 0)$.
2. Les dérivées partielles à l'ordre 1 de f existent-elles en ce point ?
3. La fonction f est-elle différentiable en ce point ?
4. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \neq 0$.
5. Étudier la continuité des dérivées partielles à l'ordre 1 en $(x_0, 0)$.

Exercice 3. (7 points) Soit α une constante réelle.

1. On considère le champ de vecteurs :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\[2ex] \dfrac{\alpha y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\[2ex] \dfrac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}.$$

   (a) Pour quelle valeur α_1 de α le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ?

   (b) On suppose désormais que $\alpha = \alpha_1$. Calculer le potentiel scalaire f dont dérive $\vec{V}$.

   (c) Calculer le Laplacien de f.

   (d) Retrouver le résultat précédent en utilisant les coordonnées sphériques.
   Rappel : *Soit r, θ et ϕ les coordonnées sphériques d'un point $M = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$. Alors le Laplacien de f en coordonnées sphériques est donnée par la formule suivante :*

$$\Delta f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)) =$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,\phi) + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\phi) + \frac{1}{r^2\cos^2(\phi)}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta,\phi) - \frac{\tan(\phi)}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \phi}(r,\theta,\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(r,\theta,\phi)$$

   où $f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)) = g(r,\theta,\phi)$.

Tournez la page S.V.P

2. On considère maintenant le champ de vecteurs :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\ \\ \dfrac{-2\alpha x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Pour quelle valeur α_2 de α le champ de vecteurs $\vec{U}$ dérive d'un potentiel vecteur ?

   (b) On suppose désormais que $\alpha = \alpha_2$. Soient P, Q et R trois fonctions dérivables définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} P(y) \\ \\ Q(x) \\ \\ R(1+x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}.$$

   Trouver P, Q et R pour que $\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{U}$, $P(0) = Q(0) = 0$ et $P(1) = Q(1) = R(1) = 1$.