Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Juin 2019- Final-corrigé **Durée : 2h00.**

Exercice 1. (**5 points**)

1. On considère la courbe $\mathcal{C}_1$ de $\mathbb{R}^3$, définie par l'équation paramétrique suivante :

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z(t) = t \end{cases}$$

On suppose que $\mathcal{C}_1$ est orientée dans le sens trigonométrique.

(a) Représenter graphiquement l'allure de la courbe $\mathcal{C}_1$.

(b) Calculer la longueur de $\mathcal{C}_1$.

Corrigé : On a

$$l(\mathcal{C}_1) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1}dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

(c) Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V} = (-y, x, \cos(z))$ le long de la courbe $\mathcal{C}_1$.

Corrigé : On a

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_1}(\vec{V}) = \int_{\mathcal{C}_1} -ydx + xdy + \cos(z)dz = \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t) + \cos(t))dt = 2\pi.$$

2. On considère la courbe $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ où $\mathcal{C}_2$ est la droite passant par les points $O = (1, 0, 0)$ et $A = (1, 0, 2\pi)$. De plus, on suppose que $\mathcal{C}_2$ est orientée de A vers O.

(a) Calculer la circulation du champ de $\vec{V}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.

Corrigé : $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = \mathcal{T}_{\mathcal{C}_1}(\vec{V}) + \mathcal{T}_{\mathcal{C}_2}(\vec{V}) = 2\pi + \mathcal{T}_{\mathcal{C}_2}(\vec{V})$.
De plus, on sait que

$$\mathcal{C}_2 : \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 0 \qquad 0 \leq t \leq 1. \\ z(t) = 2\pi t \end{cases}$$

Alors

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_2}(\vec{V}) = \int_{\mathcal{C}_2} -ydx + xdy + \cos(z)dz = \int_0^1 2\pi\cos(2\pi t)dt = 0.$$

D'où $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = 2\pi$.

(b) Soit (S) une surface de $\mathbb{R}^3$ limitée par la courbe $\mathcal{C}$, orientée vers l'haut. Calculer, en utilisant un théorème intégral (préciser le théorème utilisé), le flux de $\text{rot}(\vec{V})$ à travers la surface (S).

Corrigé : D'après le théorème de Stokes-Ampère on sait que $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = \Phi_{(S)}(\text{rot}(\vec{V})) = 2\pi$.

(c) Soit $\vec{W} = (P(x), Q(y), R(z))$. Calculer le la circulation du champ de $\vec{W}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.

Corrigé : Tout d'abord, on peut vérifier que $\text{rot}(\vec{W}) = \vec{0}$. Cela montre que le champs de vecteurs $\vec{W}$ dérive d'un potentiel scalaire et par conséquent $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{W}) = 0$ puisque $\mathcal{C}$ est une courbe fermée.

Exercice 2. (6 points)

1. On considère le domaine défini par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\right\}.$$

on suppose que la masse surfacique est $\mu(x, y) = x^2 + 4y^2$.

(a) Représenter graphiquement D.

(b) Calculer la masse totale de D.

Corrigé : Par un changement de variables en coordonnées polaires $x = 2r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, on peut vérifier que $(x, y) \in D$ ssi $\theta \in [0, \pi/2]$, $r \in [1, 2]$. Vu que $J = 2r$, on obtient que

$$m = \int\int_D x^2 + 4y^2 dxdy = 8\int_0^{\pi/2}\int_1^2 r^3 drd\theta = 15\pi.$$

(c) Calculer le moment d'inertie de D par rapport à $o\vec{x}$.

Corrigé : Toujours par un changement de variables en polaire, on obtient

$$\mathcal{M}_{o\vec{x}}(D) = \int\int_D y^2(x^2+4y^2)dxdy = 8\int_0^{\pi/2}\int_1^2 r^5\sin^2(\theta)drd\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_1^2 r^5(1-\cos(2\theta))drd\theta = 21\pi.$$

2. Soit Γ le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.

(a) Paramétrer la courbe Γ.

Corrigé : On a $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, où

$$\Gamma_1 = \begin{cases} x = t, \\ y = 0, \end{cases} \quad 2 \leq t \leq 4, \quad \Gamma_2 = \begin{cases} x = 4\cos(\theta) \\ y = 2\sin(\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Gamma_3 = \begin{cases} x = 0, \\ y = t, \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2, \quad \text{et} \quad \Gamma_4 = \begin{cases} x = 2\cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

(b) Calculer de 2 façons différentes la circulation de $\vec{V} = \left(-yx^2, 4xy^2\right)$ le long de la courbe Γ.

Corrigé :
$1^{\text{ère}}$ méthode : On utilise le théorème de Green-Riemann, on sait que

$$\mathcal{T}_\Gamma(\vec{V}) = \int\int_D x^2 + 4y^2 dxdy = 15\pi.$$

$2^{\text{ème}}$ méthode : $\mathcal{T}_\Gamma(\vec{V}) = \mathcal{T}_{\Gamma_1}(\vec{V}) + \mathcal{T}_{\Gamma_2}(\vec{V}) + \mathcal{T}_{\Gamma_3}(\vec{V}) + \mathcal{T}_{\Gamma_4}(\vec{V})$. Tout d'abord, on peut vérifier que $\mathcal{T}_{\Gamma_1}(\vec{V}) = \mathcal{T}_{\Gamma_3}(\vec{V}) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\Gamma_2}(\vec{V}) = \int_{\Gamma_2} -yx^2dx + 4xy^2dy \quad &= 256\int_0^{\pi/2}\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)d\theta = 64\int_0^{\pi/2}\sin^2(2\theta)d\theta \\ &= 32\int_0^{\pi/2}(1-\cos(4\theta))d\theta = 16\pi\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\Gamma_4}(\vec{V}) = \int_{\Gamma_4} -yx^2dx + 4xy^2dy \quad &= 16\int_{\pi/2}^0\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)d\theta = 4\int_{\pi/2}^0\sin^2(2\theta)d\theta \\ &= 2\int_{\pi/2}^0(1-\cos(4\theta))d\theta = -\pi.\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{T}_\Gamma(\vec{V}) = 16\pi - \pi = 15\pi$.

Exercice 3. (9 points)

1. Soit $\mathcal{V}$ le volume de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq x^2+y^2+1,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

   (a) Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.

   (b) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

Corrigé : Soit D le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 du plan xOy. Alors

$$V(\mathcal{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz = \int\int_D \left[\int_0^{x^2+y^2+1} dz\right] dxdy = \int\int_D x^2+y^2+1dxdy.$$

En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, on peut voir que $(x,y) \in D$ ssi $\theta \in [0, 2\pi[$ et $r \in [0,1]$. Vu que $J = r$, on obtient

$$V(\mathcal{V}) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 + rd\theta dr = \frac{3\pi}{2}.$$

2. Soit Σ la surface limitant $\mathcal{V}$ orientée suivant la normale extérieure.

   (a) Définir et paramétrer chaque partie de la surface Σ.

Corrigé : On a $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, où

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad 0 \leq z \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \quad (x,y) \in D,$$

$$\Sigma_3 : \begin{cases} x = \sqrt{z-1}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{z-1}\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad 1 \leq z \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

avec

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2+y^2 \leq 1\}.$$

   (b) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V} = \left(xz^2, -yz^2, z\right)$ à travers Σ.

Corrigé : Puisque Σ est orientée vers la normale extérieure, alors Σ_1 est orientée vers la normale $\vec{T_\theta} \wedge \vec{T_z} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$, Σ_2 est orientée vers la normale $-(\vec{T_x} \wedge \vec{T_y}) = (0,0,-1)$ et Σ_3 est orientée vers la normale $-(\vec{T_\theta} \wedge \vec{T_z}) = (-\sqrt{z-1}\cos(\theta), -\sqrt{z-1}\sin(\theta), \frac{1}{2})$. Cela implique que

$$\Phi_{\Sigma_1}(\vec{V}) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} z^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))d\theta dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} z^2\cos(2\theta)d\theta dz = 0,$$

$$\Phi_{\Sigma_2}(\vec{V}) = \int\int_D 0dxdy = 0,$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma_3}(\vec{V}) &= -\int_1^2 \int_0^{2\pi} \vec{V}.(\vec{T_\theta} \wedge \vec{T_z})d\theta dz = -\int_1^2 \int_0^{2\pi} z^2(z-1)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) - \frac{z}{2}d\theta dz \\ &= -\int_1^2 \int_0^{2\pi} z^2(z-1)\cos(2\theta) - \frac{z}{2}d\theta dz = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}.$$

D'où $\Phi_\Sigma(\vec{V}) = \Phi_{\Sigma_1}(\vec{V}) + \Phi_{\Sigma_2}(\vec{V}) + \Phi_{\Sigma_3}(\vec{V}) = \frac{3\pi}{2}$.

   (c) Retrouver le volume de $\mathcal{V}$ en utilisant un théorème intégral (préciser le théorème utilisé).

Corrigé : On utilise le théorème de Gauss-Ostrogradski, on sait que

$$\Phi_\Sigma(\vec{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{V})dxdydz = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz = V(\mathcal{V}) = \frac{3\pi}{2}.$$

3. Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$ et g une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\int\int_D g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{2}.$$

Notons Σ_1 la partie de Σ contenue dans le cylindre d'équation $x^2+y^2=1$, Σ_2 la partie de Σ contenue dans le plan $z=0$ et $\Sigma_3 = \Sigma\backslash(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ (le complémentaire de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ dans Σ).

(a) Calculer le flux de champ de vecteurs $\vec{W} = (x, y, g(x,y))$ à travers Σ_1 et Σ_2.

Corrigé : Vu que Σ_1 est orientée suivant $\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$, et Σ_2 est orientée suivant $-(\vec{T}_x \wedge \vec{T}_y) = (0,0,-1)$, on déduit que

$$\Phi_{\Sigma_1}(\vec{W}) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) d\theta dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} d\theta dz = 4\pi,$$

et

$$\Phi_{\Sigma_2}(\vec{W}) = -\int\int_D g(x,y)dxdy = -\frac{\pi}{2}.$$

(b) Trouver le flux de $\vec{W}$ à travers Σ_3, en utilisant un théorème intégral (préciser le théorème utilisé).

Corrigé : On utilise le théorème de Gauss-Ostrogradski, on sait que

$$\Phi_\Sigma(\vec{W}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{W})dxdydz = 2\int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz = 2V(\mathcal{V}) = 3\pi.$$

D'où $\Phi_{\Sigma_3}(\vec{W}) = \Phi_\Sigma(\vec{V}) - \Phi_{\Sigma_1}(\vec{V}) - \Phi_{\Sigma_2}(\vec{V}) = 3\pi - 4\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.