Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Mai 2018 - Partiel
Durée : 2h00.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. Soit

$$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1, y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y < 0\}.$$

On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(1-x)y}\cos\left(\frac{1}{(x-1)^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y) \in Df, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement le domaine Df.
2. La fonction f est-elle continue au point $(1,0)$?
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles premières au point $(1,0)$?
4. La fonction f est-elle différentiable au point $(1,0)$?
5. Les dérivées partielle d'ordre 1 de la fonction sont elles continues ?

Exercice 2. On considère la fonction définie par

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y) \quad \text{pour tout} \quad x > 0,\ y > 0.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction g.
2. Déterminer les points critiques de la fonction g pour $x > 0$, $y > 0$.
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction g.
4. Donner la nature du (des) point(s) critique(s) trouvé(s).

Exercice 3. Soit α une constante réelle et g une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère le champ de vecteurs :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2x\left(g'(x^2+y^2+z^2) - \alpha z\right) \\ 2y\left(g'(x^2+y^2+z^2) - \alpha z\right) \\ 2zg'(x^2+y^2+z^2) - (x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

1. Pour quelle valeur α_0 de α le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ?
2. On suppose que $\alpha = \alpha_0$. Calculer le potentiel scalaire f dont dérive $\vec{V}$.
3. Toujours dans le cas $\alpha = \alpha_0$. Calculer $div(\vec{V})$. En déduire Δf.

Exercice 4.

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'équation suivante :

$$(S_\alpha) : \quad x^2 + y^2 - \alpha z^2 - \alpha = 0.$$

   (a) En discutant selon les valeurs de α déterminer la nature de (S_α). Faire une figure représentant les cas possibles.
   (b) On suppose que $\alpha \neq 0$. Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque appartenant à (S_α). Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à (S_α) en M_0.
   (c) Trouver le plan tangent à (S_α) en M_0 qui contient le vecteur $\vec{u} = (1,1,0)$ et les points $(1,1,1)$ et $(-1,1,0)$.

Tournez la page S.V.P

2. On suppose que $\alpha = 4$. Soit C la courbe d'intersection entre (S_α) et le plan $y = \sqrt{5}z$. On suppose également que $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in C$.

   (a) Trouver un vecteur tangent à la courbe C au point M_0.

   (b) Montrer que C peut s'écrire comme l'intersection d'un cylindre et d'un plan.

   (c) Obtenir une équation paramétrique de C.

   (d) Retrouver, en utilisant la question précédente, un vecteur tangent à la courbe C au point M_0.