Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Avril 2019 - Médian **Durée : 2h00.** Les documents et calculatrices sont interdits La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue au point $(0,0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f au point $(0,0)$, notées $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, pour $(x,y) \neq (0,0)$. Puis, étudier la continuité de chacune des dérivées partielles de f.
4. La fonction f est-elle différentiable au point $(0,0)$?

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les dérivées partielles premières de f.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Étudier la nature des points critiques.

Exercice 3. Soit le champ de vecteurs $\vec{V} = (\alpha y, x + 2z, 2y + e^{\alpha z})$.

1. Pour quelles valeurs de α, $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ?
2. On suppose que $\vec{V}$, dérive d'un potentiel scalaire. Déterminer le potentiel.
3. Pour quelles valeurs de α, $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur ?
4. On se place dans le cas où, $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur. On note

$$\vec{A} = x(g(z), h(y) + 1, -h(z)).$$

   Trouver g et h pour que $\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{V}$.

Exercice 4.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'équation suivante :

$$(S_\alpha) : \quad x^2 + y^2 - \alpha z^2 = \alpha - 1.$$

1. En discutant selon les valeurs de α déterminer la nature de (S_α). Faire une figure représentant les cas possibles et paramétrer la surface.
2. Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque appartenant à (S_α). Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à (S_α) en M_0.
3. On suppose que $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$. Trouver le plan tangent à (S_α) en M_0 qui contient le vecteur $\vec{u} = (1,1,0)$ et les points $(1,1,1)$ et $(-1,1,0)$.