Université de Technologie de Compiègne

MT22 - Juin 2022 - Final
Durée : 2h00.
Indiquer clairement le numéro de votre groupe.
Les documents et calculatrices sont interdits.
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (7 points)

1. On considère pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ le champ de vecteurs
$$\vec{V} = \left(n\alpha x^{n-1}\cos(y), -x^n \sin(y)\right).$$
   (a) Pour quelles valeurs de α et n le champ $\vec{V}$ dérive t-il d'un potentiel scalaire ?
   (b) On suppose que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire que l'on notera $f(x, y)$. Déterminer $f(x, y)$.
   (c) En déduire la circulation de $\vec{V}$ le long du segment $[A\ C]$ avec $A = (0, 0)$ et $C = (1, 1)$ (préciser l'orientation choisie).
2. Soit $\mathcal{C}$ la courbe définie par le triangle ABC avec $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ et $C = (1, 1)$.
   (a) Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) Calculer, pour toute valeur de α, la circulation de $\vec{V}$ le long des segments $[A\ B]$ et $[B\ C]$ (préciser les orientations choisies).
   (c) Soit D le domaine délimité par le triangle ABC. On suppose que
$$\beta = \int\int_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right) dxdy.$$
   Calculer, à l'aide du théorème de Green-Riemann, la circulation de $\vec{V}$ le long du segment $[A\ C]$ en fonction de α et β, en précisant l'orientation choisie.
   (d) Donner la valeur de β lorsque $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire et retrouver la circulation de $\vec{V}$ le long du segment $[A\ C]$ dans ce cas, en précisant l'orientation choisie.

Exercice 2. (13 points)

1. Soit
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad y < x^2 + y^2 < 1,\ x > 0\right\}.$$
   (a) Représenter D graphiquement.
   <u>**Indication**</u> : On pourra écrire $y = x^2 + y^2$ comme l'équation d'un cercle.
   (b) Trouver l'aire de D, en utilisant les résultats connus sur les aires de secteur de disque.
   (c) Soit $D^- = D \cap \{y \leq 0\}$ et $D^+ = D \cap \{y \geq 0\}$. Calculer les aires de D^+ et de D^-, en effectuant un changement de variables en coordonnées polaires.
   (d) En déduire l'aire de D.
2. On suppose que $\mathcal{C}$ est le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.
   (a) Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) Calculer la circulation de $\vec{U} = (-y, x)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ directement puis en utilisant le théorème de Green-Riemann.
   (c) En déduire la circulation de $\vec{V} = (x\sin(x^2 + y^2), y\sin(x^2 + y^2) + x)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Soit $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.
   (a) En effectuant le changement de variables, $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, calculer
$$I_1 = \int\int_{D^-} f(x, y)dxdy \quad \text{et} \quad I_2 = \int\int_{D^+} f(x, y)dxdy.$$
   <u>**Indication**</u> : On pourra utiliser que $r = \sin(\theta)$ sur le cercle d'équation $y = x^2 + y^2$.
   (b) En déduire la valeur de
$$I = \int\int_D f(x, y)dxdy.$$
4. On considère le volume suivant :
$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad y < x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ x > 0,\ z > 0\right\}.$$

Tournez la page S.V.P

(a) Faire une figure représentant $\mathcal{V}$ et déterminer la projection de $\mathcal{V}$ sur le plan (xOy).

(b) Calculer

$$J = \int\int\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{1 - x^2 - y^2} dxdydz.$$

(c) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.

5. Soit (S) la surface limitant le volume $\mathcal{V} \cap \{y \leq 0\}$.

   (a) Définir et paramétrer chaque partie de la surface (S).

   (b) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{W} = (x, y, z)$ à travers (S), lorsque (S) est orientée vers la normale unitaire extérieure.

Rappel

1. Rotationnel d'un champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$: Soit $\vec{V} = (P(x,y), Q(x,y))$. Alors, on définit le rotationnel de $\vec{V}$ par le champs de vecteurs suivant :

$$\mathbf{rot}(\vec{V}) = \left(0, 0, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right).$$

2. Masse d'une courbe : Soit Γ une courbe d'équation $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ de masse curviligne $\mu(x,y,z)$, alors la masse totale de Γ est donnée par la formule suivante :

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \mu(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

3. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord Γ. Si Γ est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy.$$

4. Intégrale surfacique : Soit Σ une surface orientée suivant le vecteur normal unitaire $\vec{n}$. Alors, pour tout champ de vecteurs $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit le flux de $\vec{V}$ à travers Σ comme suit

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{V}) = \int\int_{\Sigma} \vec{V}.\vec{n}\, d\sigma.$$